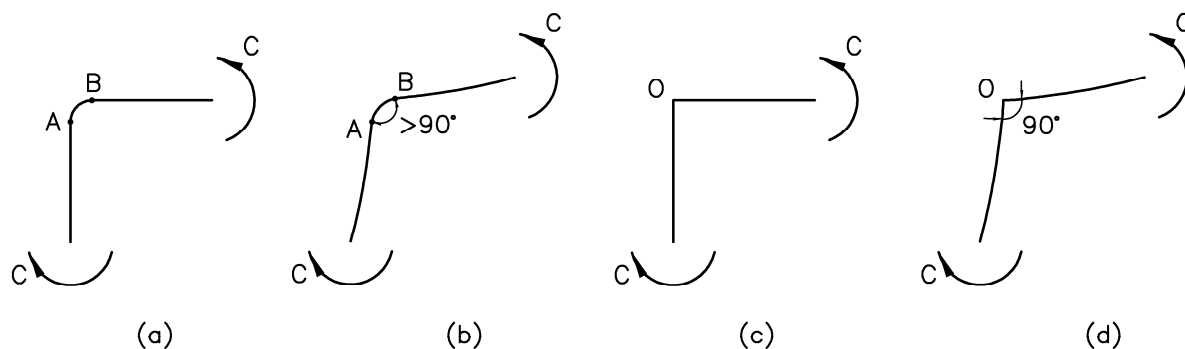


IL TRACCIAMENTO QUALITATIVO DEL MOMENTO FLETTENTE NEI PORTALI

Alcune proprietà della deformata dei portali

Si esaminano nel seguito alcune proprietà della deformata dei portali. Queste proprietà permettono di definire la deformata qualitativa del portale, dalla quale risulta relativamente semplice dedurre il diagramma qualitativo del momento flettente. Un tracciamento qualitativo diretto (cioè senza aiutarsi con la conoscenza della deformata) del momento flettente in un portale, che è spesso una struttura staticamente indeterminata, è in genere un problema molto più difficile. La strategia qui proposta è quindi quella di determinare una deformata qualitativa del portale, dalla quale dedurre un andamento qualitativo del momento flettente.

La prima proprietà della deformata dei portali è la conservazione, nel passare dal portale indeformato a quello deformato, dell'angolo formato tra due rami adiacenti del portale in prossimità di un cambio di direzione dell'asse della struttura trabeiforme a portale. Spesso tale angolo è retto, per cui comunemente si parla di conservazione dell'angolo retto.

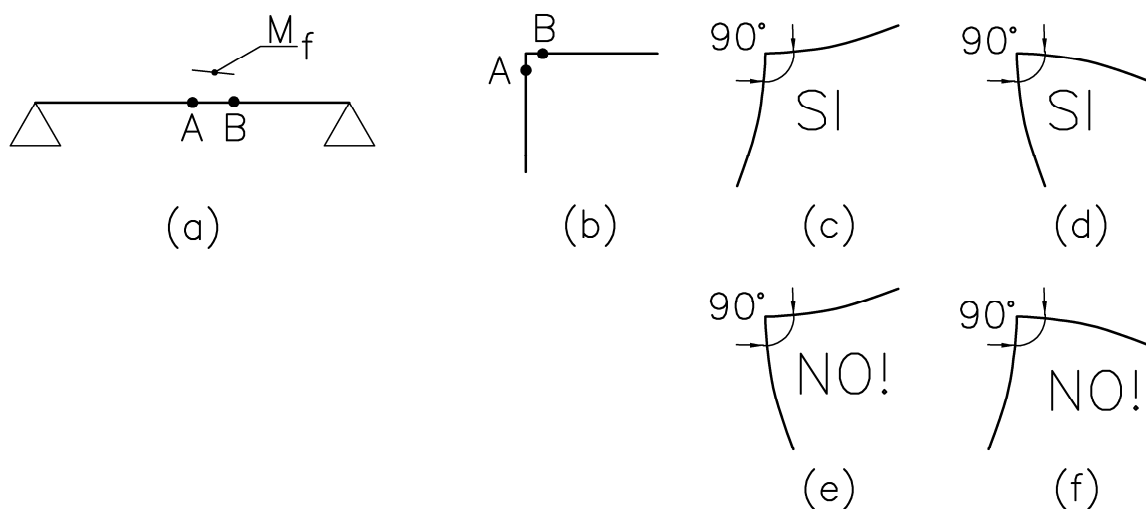


Figura

Si illustra la proprietà della conservazione dell'angolo tramite l'esempio di Figura. La Figura (a) rappresenta una parte di struttura indeformata, costituita da due rami trabeiformi rettilinei adiacenti, collegati tra loro con continuità (va esclusa la presenza di una cerniera interna) da un arco $A B$. Quando viene applicata una coppia C , i due rami inizialmente rettilinei si inarcano, ma anche l'arco $A B$ si inflette. Gli assi dei due rami inizialmente rettilinei ed in prossimità dei due punti A e B , che nella situazione indeformata erano a 90° , in seguito alla deformata dell'arco $A B$ formano un angolo maggiore di 90° , Figura (b). Si considera ora la struttura indeformata di Figura (c), dove è assente l'arco $A B$ della Figura (a), in quanto la transizione tra i due rami è a spigolo vivo. In

seguito all'applicazione delle coppie C , i due rami si inflettono, ma, mancando un tratto di passaggio tra i due rami (cioè mancando l'arco $A B$), l'angolo inizialmente retto tra i due rami si conserva con la deformazione, Figura (d).

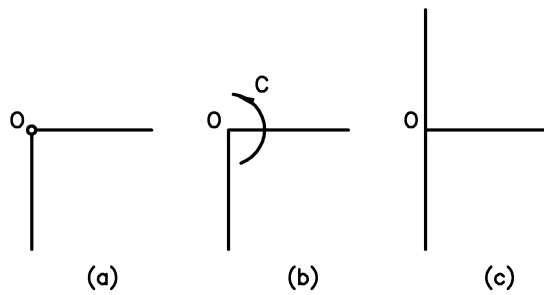
Si considera nel seguito una seconda proprietà della deformata di un portale, illustrata in Figura. Nella Figura (a) viene rappresentata una trave dritta, e viene tracciato un momento flettente plausibile tra due punti adiacenti A e B , il quale varia linearmente se non sono presenti carichi applicati nel tratto $A B$. In genere il momento flettente avrà lo stesso segno nei due punti A e B , essendo estremamente improbabile, anche se non impossibile, che il momento cambi di segno tra A e B . In Figura (b) si applica la precedente osservazione a due rami adiacenti di un portale. Anche in questo caso è estremamente improbabile che il momento flettente cambi segno tra A e B . La conservazione del segno del momento in vicinanza del punto di passaggio da un ramo all'altro implica che la curvatura dei due rami (si ricorda che la curvatura vale $M_f/(EJ)$, e quindi, essendo E e J positivi, la curvatura cambia segno solo se M_f cambia segno) conserva lo stesso segno in vicinanza del punto di passaggio. Le due inflessioni più probabili sono quindi quelle delle Figure (c) e (d), mentre quelle



Figura

delle Figure (e) ed (f) sono fortemente improbabili. (Le diciture SI e NO! in Figura sono quindi schematiche, ma non esprimono una verità assoluta.) Si noti che queste inflessioni devono avvenire nel rispetto della conservazione dell'angolo retto, come mostrato in Figura.

In conclusione, in aggiunta alla conservazione dell'angolo retto tra i due rami adiacenti di un portale, è fortemente probabile (in pratica "sempre" verificata) anche la conservazione del segno della curvatura al passaggio tra i due rami.



Figura

La regola precedente richiede che nello spigolo la struttura sia continua, e che nello spigolo non sia applicata una coppia concentrata. Se nello spigolo è presente una cerniera interna, Figura (a), la quale spezza la continuità della struttura, i due rami che confluiscono nello spigolo possono inflettersi liberamente, e la regola della conservazione del segno della curvatura

(e della conservazione dell'angolo retto) non vale. Similmente, se la struttura è continua, ma nello spigolo è applicata una coppia concentrata C , Figura (b), la caratteristica di sollecitazione di momento flettente presenta il salto di coppia, cioè il diagramma del momento è discontinuo, per cui i due rami possono inflettersi senza rispettare la regola della conservazione del segno della curvatura (mentre rimane valida la conservazione dell'angolo retto). Infine, se convergono tre o più rami in uno spigolo, Figura (c), la regola della conservazione dei flessi non vale nella sua forma di Figura, ma vale in una forma più complicata, qui non esaminata.

Occorre considerare altre proprietà della deformata di un portale per poterla definire qualitativamente senza risolvere analiticamente la struttura. Queste proprietà riguardano il numero di flessi che possono essere presenti nei tratti rettilinei del portale. I flessi cadono dove il momento flettente si annulla, assumendo segni opposti da una parte e dall'altra del punto di annullamento.

Si considera la Figura (a), che rappresenta un tratto rettilineo non caricato. Tale tratto potrebbe essere la traversa od una colonna di un portale. Essendo il tratto rettilineo non caricato, il momento flettente è rettilineo. Quindi il momento flettente può non intersecare l'asse del tratto rettilineo, nel qual caso non vi sono flessi, oppure intersecarlo al più una sola volta, nel qual caso il tratto rettilineo presenta un solo flesso. Si conclude che, se un tratto rettilineo non è caricato, esso può o non avere alcun flesso, o avere al massimo un flesso.

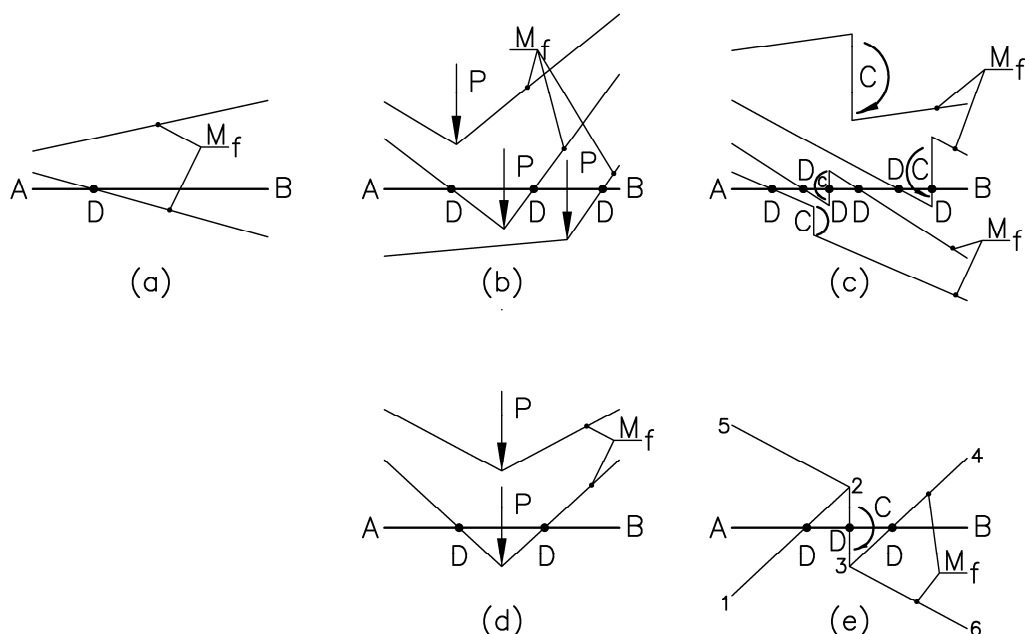
(Il segmento che descrive il momento flettente potrebbe anche sovrapporsi all'asse del tratto rettilineo. Questo caso non viene considerato, dato che descrive un tratto di portale flessionalmente scarico, una situazione non interessante.)

La Figura (b) analizza un tratto rettilineo caricato da una forza trasversale P . Il momento flettente è bilineare. La curva più alta rappresenta un momento flettente bilineare che non interseca l'asse del tratto rettilineo di trave. In questo caso, il tratto rettilineo non presenta alcun flesso. La seconda curva dall'alto rappresenta un diagramma bilineare del momento flettente, che interseca in due punti D l'asse del tratto rettilineo. In questo caso, il tratto rettilineo presenta due

flessi nei due punti D . La terza curva dall'alto mostra un diagramma bilineare di momento flettente, che interseca l'asse del tratto rettilineo in un solo punto D . In questo caso, il tratto rettilineo presenta un solo flesso in D . In conclusione, se un tratto rettilineo di trave è caricato da una forza trasversale, tale tratto può presentare zero flessi, un flesso, od al massimo due flessi.

La Figura (c) analizza un tratto rettilineo caricato da una coppia concentrata C . Il momento flettente è formato da un salto, e da due rami paralleli. La curva più alta rappresenta un momento flettente che non interseca l'asse del tratto rettilineo. In questo caso, il tratto rettilineo non presenta alcun flesso. La seconda curva dall'alto rappresenta un diagramma del momento flettente che interseca in due punti D l'asse del tratto rettilineo. In questo caso, il tratto rettilineo presenta due flessi in D . La terza curva dall'alto mostra un diagramma di momento flettente che interseca l'asse del tratto rettilineo in tre punti D . In questo caso, il tratto rettilineo presenta tre flessi nei punti D . La quarta curva dall'alto mostra un diagramma di momento flettente che interseca l'asse del tratto rettilineo in un solo punto D . In questo caso, il tratto rettilineo presenta un solo flesso nel punto D . In conclusione, se un tratto rettilineo di trave è caricato da una coppia concentrata, tale tratto può presentare zero flessi, un flesso, due flessi, od al massimo tre flessi.

Il caso di caricamento con forza e coppia concentrate nello stesso punto possiede proprietà analoghe a quello di sola coppia, e non viene considerato in dettaglio.



Figura

Un tratto rettilineo non caricato da forze, inteso come problema simmetrico, presenta un momento flettente lineare che, in seguito alla simmetria, non può essere inclinato, e quindi è costante. In questo caso, il

diagramma del momento flettente non può intersecare l'asse del tratto rettilineo di trave, e quindi non può essere presente alcun flesso.

La Figura (d) presenta un tratto rettilineo caricato da una forza trasversale P in condizioni di simmetria. Per esempio, il tratto rettilineo potrebbe essere la traversa di un portale che possiede un asse di simmetria verticale, il quale passa per il centro della traversa, dove la traversa è caricata dal carico P agente lungo l'asse di simmetria. Il momento flettente è simmetrico bilineare. La curva bilineare superiore di Figura (d) rappresenta un momento flettente che, non intersecando l'asse del tratto rettilineo, non produce flessi. Invece la curva bilineare inferiore, simmetrica, interseca l'asse del tratto rettilineo in due punti D , nei quali capitano dei flessi. In conclusione, nel caso simmetrico di Figura (d), nel tratto rettilineo capitano o zero flessi, o al massimo due flessi, ma non un solo flesso. (Il caso di un solo punto di annullamento può capitare se i due punti D di Figura (d) vanno a coincidere. Questa situazione è molto particolare, e viene tralasciata.)

La Figura (e) presenta un tratto rettilineo caricato da una coppia concentrata C in condizioni di antisimmetria. Per esempio, il tratto rettilineo potrebbe essere la traversa di un portale la cui geometria possiede un asse di simmetria verticale, il quale passa per il centro della traversa, dove la traversa è caricata dalla coppia C applicata al centro della traversa. In tali condizioni, la deformata del portale è antisimmetrica, ed antisimmetrico è anche il momento flettente, costituito da un salto e da due rami paralleli. Si noti che il salto è metà sopra, metà sotto, l'asse della trave, per ragioni di antisimmetria. Il diagramma del momento flettente definito dai numeri 1 2 3 4, intersecando l'asse del tratto rettilineo in tre punti D , produce tre flessi. Il diagramma del momento flettente definito dai numeri 5 2 3 6, non intersecando l'asse del tratto rettilineo, non produce flessi. In conclusione, nel caso antisimmetrico di Figura (e), nel tratto rettilineo capitano o zero flessi, o al massimo tre flessi, ma non un flesso o due flessi.

(Il caso simmetrico richiede la presenza di una forza e non di una coppia, che non produce una deformata simmetrica; il caso antisimmetrico richiede la presenza di una coppia e non di una forza, che non produce una deformata antisimmetrica.)

La Tabella riassume le nozioni sui flessi nei tratti rettilinei di trave.

| | Numero di flessi |
|----------------------------------------------------------|------------------|
| Tratto rettilineo non caricato | 0,1 |
| Tratto rettilineo caricato da forza concentrata | 0,1,2 |
| Tratto rettilineo caricato da coppia concentrata | 0,1,2,3 |
| Tratto rettilineo caricato da forza e coppia concentrate | 0,1,2,3 |
| Tratto rettilineo scarico, problema simmetrico | 0 |
| Tratto rettilineo flessionalmente scarico, problema | 1 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| antisimmetrico | |
| Tratto rettilineo caricato da forza concentrata, problema simmetrico | 0,2 |
| Tratto rettilineo caricato da coppia concentrata, problema antisimmetrico | 1,3 |

Tabella

Si propone nel seguito uno schema riassuntivo per tracciare la deformata qualitativa di un portale.

(1) Conviene in genere rilassare (indebolire) la continuità del portale al passaggio tra traversa e colonne, introducendo fittiziamente delle cerniere interne. (Questo approccio deve essere adattato se l'introduzione delle cerniere interne rende labile la struttura.) Le cerniere rilassano non realisticamente la condizione di conservazione dell'angolo retto, ma semplificano il tracciamento della deformata qualitativa della traversa.

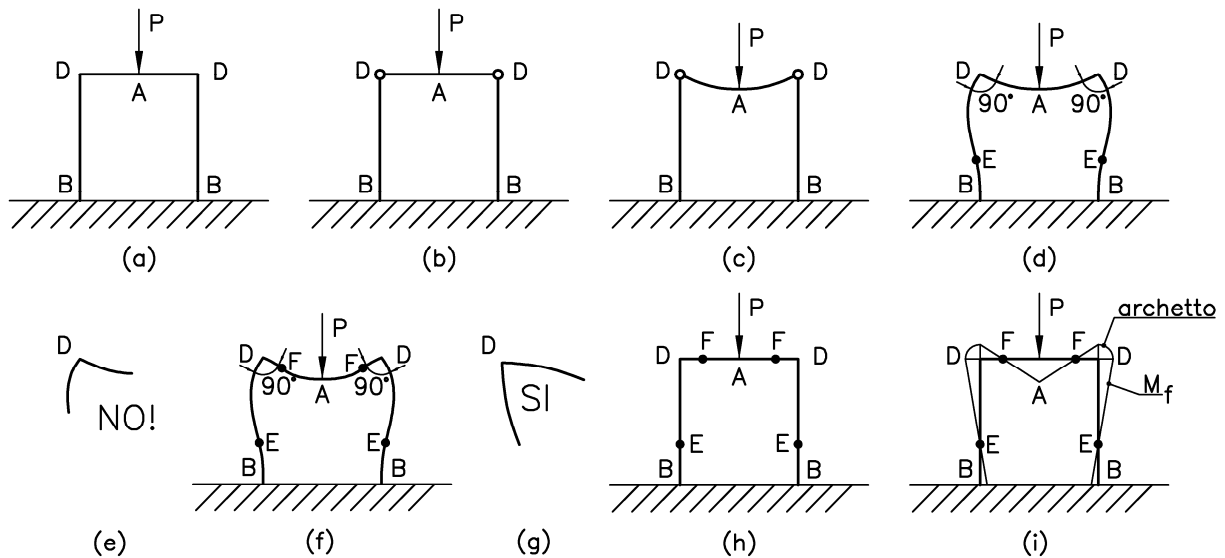
(2) Si impiega poi la conservazione dell'angolo retto per tracciare la deformata qualitativa delle colonne.

(3) Infine, si verifica se è soddisfatta la condizione di conservazione del segno della curvatura al passaggio tra traversa e colonne. Se tale condizione non è verificata, occorre aggiungere dei flessi alla deformata, seguendo le regole della Tabella.

(4) Partendo dalla deformata qualitativa, si traccia il momento flettente qualitativo, che è formato da tratti rettilinei nei tratti non caricati, e che diventa nullo nei punti di flesso, la cui conoscenza serve da guida nel tracciamento del diagramma del momento flettente.

Esempi di tracciamento qualitativo della deformata dei portali

Si considera il portale di Figura (a), doppiamente incastrato in B , e caricato da una forza trasversale concentrata P , applicata in mezzeria della traversa, punto A . Si vuole tracciare il momento flettente qualitativo.



Figura

Il problema è simmetrico rispetto ad un asse verticale passante per la mezzeria della traversa, dato che la geometria, i vincoli, ed il caricamento sono simmetrici. Quindi la deformata del portale ed il diagramma del momento flettente sono simmetrici. La struttura è tre volte iperstatica. Essendo il problema simmetrico, se si svincola in A occorre introdurre forze normali e coppie incognite, ma non forze taglianti, che hanno comportamento antisimmetrico. Il portale è quindi due volte staticamente indeterminato.

Per tracciare il momento flettente qualitativo, si segue il seguente canovaccio.

(1) Si rilassa la continuità del portale al passaggio tra traversa e colonne, punti D , introducendo due cerniere interne, Figura (b), e si traccia la deformata qualitativa simmetrica della traversa, Figura (c).

(2) Si impiega la conservazione dell'angolo retto per tracciare la deformata qualitativa delle colonne, che spanciano in fuori, Figura (d); ripristinata la conservazione dell'angolo retto, si rimuovono le cerniere che erano state aggiunte in D .

(3) Si osserva che non è soddisfatta la condizione di conservazione del segno della curvatura al passaggio tra traversa e colonne, punti D di Figura (e). Occorre perciò modificare la deformata della traversa o delle colonne, variando la curvatura di alcuni tratti ed aggiungendo quindi dei flessi, in accordo con le regole della Tabella. Le colonne sono tratti non caricati, e quindi non possono

avere più di un flesso. Siccome un flesso è già presente nel punto E delle colonne, Figura (d), non è possibile aggiungere un ulteriore flesso alle colonne.

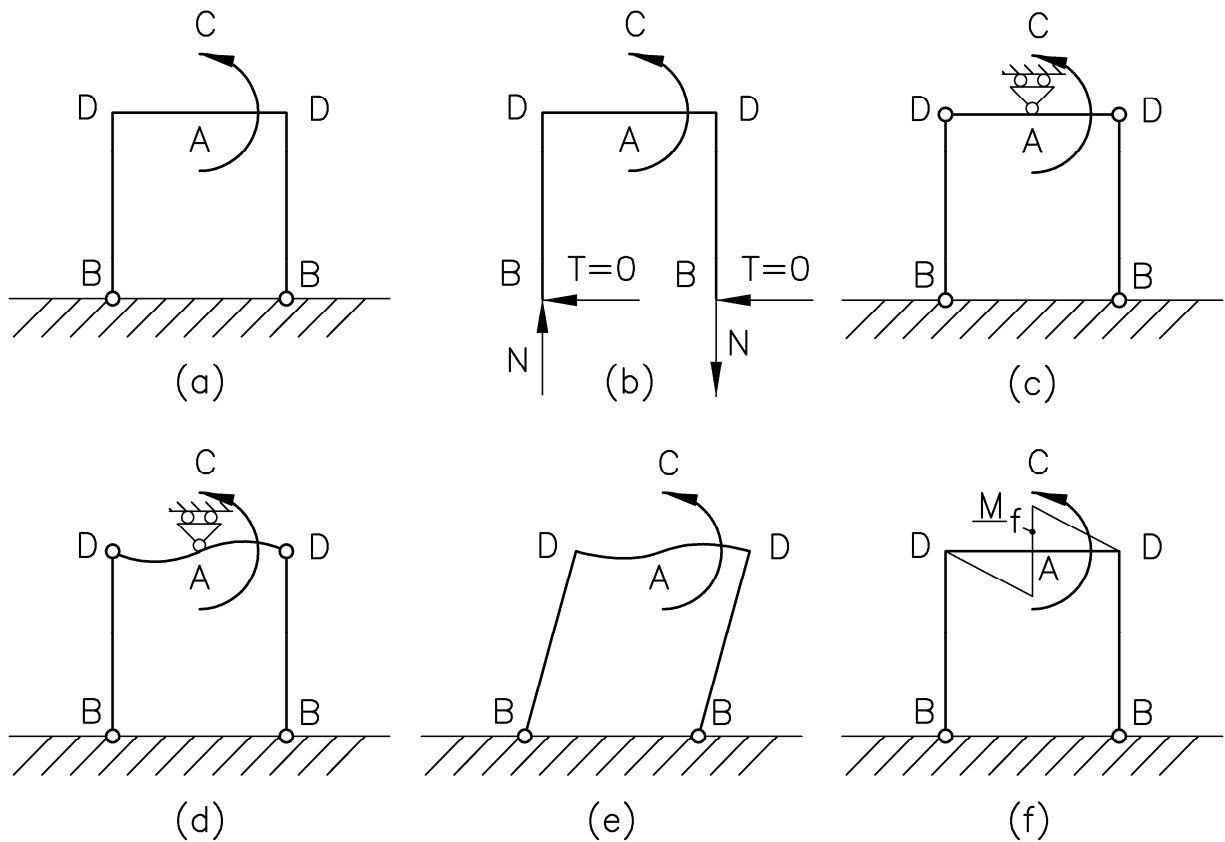
La traversa è caricata da una forza concentrata trasversale, ed il problema è simmetrico, per cui dalla Tabella possono essere presenti lungo la traversa o zero flessi o due flessi. Nella deformata della traversa di Figura (d) non è presente alcun flesso. E' quindi lecito aggiungere due flessi alla traversa in posizioni simmetriche, punti F , e cambiare la curvatura dei tratti DF . Adesso le zone d'angolo, nell'intorno dei punti D , rispettano la conservazione della curvatura, Figure (f) e (g).

(4) Partendo dalla deformata qualitativa, si traccia il momento flettente qualitativo. E' più chiaro tracciare il momento sul portale indeformato, Figura (h). Si prendono come riferimento le posizioni dei flessi, punti E ed F , Figure (h) ed (i). e si traccia il diagramma del momento, formato da tratti rettilinei nei tratti non caricati, e che diventa nullo nei punti di flesso, Figura (i). L'archetto di Figura (i) serve per sottolineare che il valore del momento si conserva nel cambio di direzione dell'asse del portale, punti D .

(Si noti che, se non è applicata una coppia concentrata, il momento si conserva nel cambio di direzione dell'asse del portale, ma in genere non si conserva la sua pendenza. Il momento potrebbe per esempio essere costante in un ramo, e pendente nell'altro ramo. Se è applicata una coppia concentrata nel punto di cambio di direzione dell'asse, essa provoca un salto di coppia, ed il momento non si conserva nel passare da un ramo all'altro. Si ricordi la regola del filo nel tracciamento del momento flettente, presentata nel capitolo 10.)

Il diagramma ottenuto del momento flettente è qualitativo, nel senso che la posizione dei flessi è solo indicativa, e con queste tecniche qualitative non si è potuto definire il valore dei picchi del momento. Tuttavia il risultato qualitativo è importante, dato che, senza svolgere calcoli, ci si rende conto se le fibre interne ed esterne sono a trazione o a compressione nei vari tratti del portale. Inoltre, questa tecnica qualitativa regala il colpo d'occhio nell'individuare possibili errori nella deformata ottenuta per via analitica ma compromessa da errori di calcolo.

Si considera il portale di Figura (a), doppiamente incernierato in B , e caricato da una coppia concentrata C , applicata in mezzeria della traversa, punto A . Si vuole tracciare il momento flettente qualitativo.



Figura

Questo problema è antisimmetrico rispetto ad un asse verticale passante per la mezzeria della traversa, dato che la geometria ed i vincoli sono simmetrici, ma il caricamento costituito dalla coppia è tale da produrre una deformata antisimmetrica. Questo portale è una volta iperstatico. Svincolando il portale come in Figura (b), le reazioni vincolari sono una forza tagliante T ed uno sforzo normale N per ogni estremo B , i cui versi devono rispettare la proprietà di antisimmetria del portale. Le reazioni vincolari non includono coppie, a causa della presenza delle cerniere in B . Le due forze taglianti T , essendo equiverse e non equilibrate da altre forze orizzontali, devono essere entrambe nulle. Le forze N si calcolano dall'equilibrio alla rotazione, dato che esse devono fornire un effetto coppia che equilibra C . Si conclude che l'unica reazione vincolare, N , è calcolabile tramite equazioni di equilibrio, e quindi questo portale è staticamente determinato (anche se una volta iperstatico).

Per tracciare il diagramma qualitativo del momento flettente, si segue il canovaccio classico.

(1) Si rilassa la continuità del portale al passaggio tra traversa e colonne, punti D , introducendo due cerniere interne, Figura (c). La struttura però diventa labile; per evitare questo aspetto indesiderato, si è aggiunto un carrello in A , che

permette ad A di muoversi liberamente orizzontalmente, ma non verticalmente, Figura (c), come richiesto dalla fisica del problema. Si traccia poi la deformata qualitativa antisimmetrica della traversa, Figura (d).

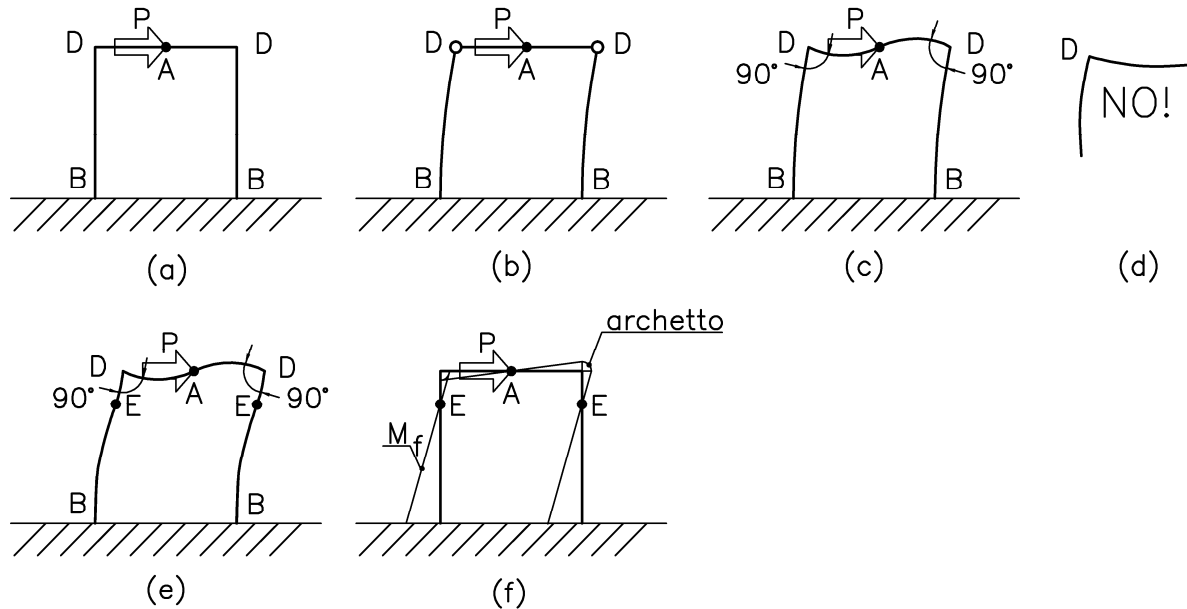
(2) Dalla Figura (b) si deduce che il momento flettente è nullo lungo le colonne, le quali possono spostarsi di moto di corpo rigido, ma non possono inflettersi. Infatti le forze N , che sono le uniche reazioni non nulle, passano per l'asse indeformato delle colonne, e quindi, non avendo braccio rispetto al baricentro di una sezione generica delle colonne, non producono momento flettente. Si impiega la conservazione dell'angolo retto per definire lo spostamento (rotazione) di corpo rigido delle colonne, Figura (e); ripristinata la conservazione dell'angolo retto, si rimuovono le cerniere in D ed il carrello in A .

(3) Si esamina nel seguito la condizione di conservazione del segno della curvatura al passaggio tra traversa e colonne, punti D di Figura (e). Questa situazione non è compresa tra quelle di Figura, ed è una situazione anomala. Infatti, il tratto delle colonne ha curvatura nulla, mentre il tratto della traversa possiede una propria curvatura. Questo caso anomalo è fisicamente accettabile, per cui in questo caso non bisogna alterare curvatures ed introdurre flessi.

(4) Partendo dalla deformata qualitativa di Figura (e), si disegna il momento flettente nel portale indeformato. Il momento lungo la traversa prevede il salto di coppia dove è applicata C , e si annulla in D , dato che D può essere interpretato, oltre che come punto estemale della traversa, anche come punto estemale delle colonne, lungo le quali il momento flettente è identicamente nullo.

Si ribadisce che la deformata di Figura (e) non soddisfa la conservazione del segno della curvatura illustrata in Figura. Infatti la curvatura dei due rami uscenti da D non conserva lo stesso segno, dato che una delle due curvatures è nulla. Infatti, la conservazione del segno della curvatura non è un teorema, ma una regola pratica.

Si considera il portale di Figura (a), doppiamente incastrato in B , e caricato da una forza longitudinale concentrata P , applicata in mezzeria della traversa, punto A . Si vuole tracciare il momento flettente qualitativo.



Figura

Questo portale è tre volte iperstatico. Questo problema è antisimmetrico rispetto ad un asse verticale passante per la mezzeria della traversa, dato che il portale è simmetrico rispetto ad un asse verticale che passa per la mezzeria della traversa, i vincoli sono simmetrici, ma il caricamento è tale che produce una deformata antisimmetrica del portale. Il momento flettente è quindi antisimmetrico. Essendo il problema antisimmetrico, se si svincola in mezzeria della traversa, punto A , occorre considerare solo una forza tagliante, l'unica ad avere un comportamento antisimmetrico, mentre lo sforzo normale e la coppia devono annullarsi in mezzeria perché presentano un comportamento simmetrico. Quindi questo portale è una volta staticamente indeterminato.

Per tracciare il momento flettente qualitativo, si segue il canovaccio consueto, con qualche adattamento.

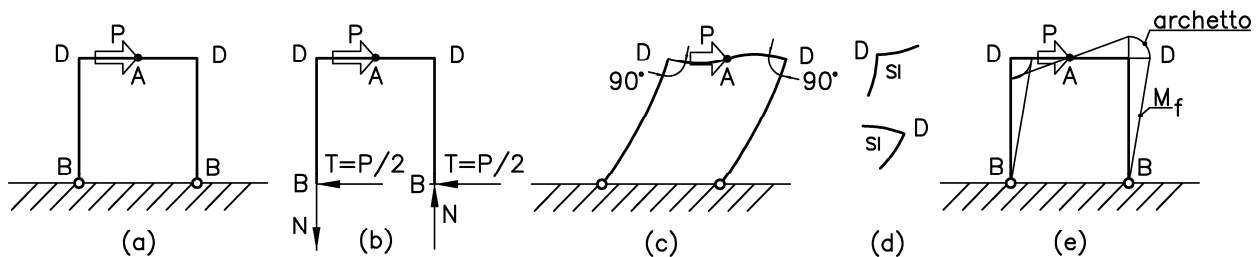
- (1) Si rilassa la continuità del portale al passaggio tra traversa e colonne, punti D , introducendo due cerniere interne, Figura (b), e si traccia la deformata qualitativa delle colonne; la traversa rimane indeformata.
- (2) Si impiega la conservazione dell'angolo retto per tracciare la deformata qualitativa antisimmetrica della traversa, Figura (c); ripristinata la conservazione dell'angolo retto, si rimuovono le cerniere in D , Figura (c).
- (3) Si osserva che non è soddisfatta la condizione di conservazione del segno della curvatura al passaggio tra traversa e colonne, punti D di Figura (c) e Figura (e). Occorre perciò modificare la deformata della traversa o delle colonne, variando la curvatura di alcuni tratti ed aggiungendo quindi dei flessi,

in accordo con le regole della Tabella. La traversa è un tratto rettilineo di trave flessionalmente scarico, dato che essa è caricata da una forza longitudinale P che passa per l'asse geometrico della traversa, e quindi non produce momento flettente sulla traversa. Inoltre, la traversa deforma in modo antisimmetrico. Seguendo la Tabella, la traversa deve avere uno e un solo flesso. Siccome un flesso è già presente nel punto A , non si può aggiungere altri flessi alla traversa. Si modificano quindi le colonne, Figura (e), aggiungendo due flessi, punti E . Infatti le colonne non sono caricate, e quindi ogni colonna può avere al massimo un flesso. Con la deformata di Figura (e) si riesce a rispettare, nell'intorno dei punti di spigolo D , sia la conservazione dell'angolo retto, sia la conservazione della curvatura.

(4) Partendo dalla deformata qualitativa di Figura (e), si traccia il momento flettente qualitativo. Si traccia il momento sul portale indeformato, Figura (f). Si prendono come riferimento le posizioni dei due flessi lungo le colonne, punti E , e del flesso centrale lungo la traversa, punto A , e si traccia il diagramma del momento, formato da tratti rettilinei, e che diventa nullo nei punti di flesso, Figura (f). L'archetto di Figura (f) sottolinea che il valore del momento si conserva nel cambio di direzione dell'asse del portale, punti D di Figura (a).

Si considera il portale di Figura (a), doppiamente incernierato in B , e caricato da una forza longitudinale concentrata P , applicata in mezzeria della traversa, punto A . Si vuole tracciare il momento flettente qualitativo del portale.

Questo portale costituisce un problema antisimmetrico rispetto ad un asse



Figura

verticale passante per la mezzeria della traversa, dato che la geometria ed i vincoli sono simmetrici, ma il caricamento è tale che la deformata del portale è antisimmetrica. Questo portale è una volta iperstatico. Svincolando in corrispondenza delle cerniere, punti B di Figura (b), si introducono le reazioni vincolari: il taglio T , e lo sforzo normale N ; la coppia non va introdotta a causa della presenza delle cerniere in B . I versi delle forze T ed N rispettano l'antisimmetria del problema. Siccome le due forze T sono equiverse, e concorrono in uguale misura ad equilibrare P , esse devono valere $P/2$. Le forze N si possono poi calcolare dalla condizione di equilibrio del portale alla rotazione attorno ad A . In conclusione, le reazioni vincolari possono essere

calcolate tramite le equazioni di equilibrio, e quindi questo portale è staticamente determinato, anche se una volta iperstatico.

La presenza delle forze T provoca una flessione nelle colonne, tale che le fibre di destra delle colonne vanno in trazione, e quelle di sinistra in compressione. Le forze N non producono momento flettente nelle colonne indeformate, dato che esse passano per l'asse delle colonne, e quindi non hanno braccio rispetto al baricentro di una sezione generica delle colonne. Le colonne si inflettono quindi come in Figura (c). La traversa si inflette ad S in modo antisimmetrico. Le Figure (c) e (d) mostrano che la deformata qualitativa del portale rispetta sia la conservazione dell'angolo retto, sia la conservazione del segno della curvatura. Partendo dalla deformata qualitativa di Figura (c), la Figura (e) mostra il diagramma del momento flettente, lineare a tratti, nullo in A ed in B . L'archetto di Figura (e) sottolinea che il valore del momento flettente si conserva nel cambio di direzione dell'asse del portale, punti D .