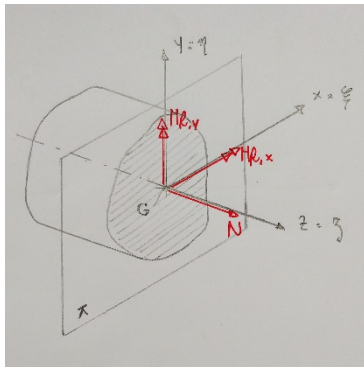
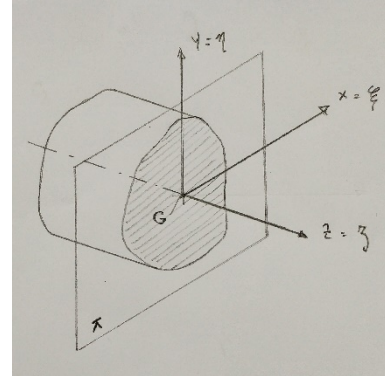


## Introduzione

In questa lezione ci concentreremo sull'espressione della *Deformazione lungo  $\zeta$  della trave*, dove l'asse  $\zeta$  è quello parallelo all'asse baricentrico della trave stessa, supponendo che la sezione rimanga piana. Per la sezione in questione utilizzeremo un *sistema di riferimento locale  $\xi, \eta, \zeta$*  coincidente, per semplicità, con il *sistema di riferimento fisico  $x, y, z$* . La sezione della trave, come visibile in figura, appartiene al piano  $\pi$ .



Affinchè la sezione continui ad appartenere al suddetto piano, andiamo a definire lo *Sforzo Normale Baricentrico  $N$* , il *Momento Flettente lungo  $x$   $M_{f,x}$*  e il *Momento Flettente lungo  $y$   $M_{f,y}$*  sul piano  $\pi$ . Con queste *Caratteristiche di Sollecitazione* la sezione rimarrà entro piano. Al contrario, applicando alla stessa sezione il *Momento Torcente  $M_T$* , e il *Taglio lungo  $x$  e lungo  $y$   $T_x$  e  $T_y$* , la sezione non rimarrebbe piana e perciò non li considereremo.

## Espressione della “deformazione lungo Z” $\varepsilon_z$

Affinchè la deformazione della sezione considerata resti piana, abbiamo delle deformazioni libere e delle deformazioni vincolate. Le deformazioni libere sono  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , mentre abbiamo vincolate le deformazioni  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{zx}$  e  $\gamma_{yz}$ .

In linea del tutto generale  $\varepsilon_z$  può essere vista come somma di tre termini:

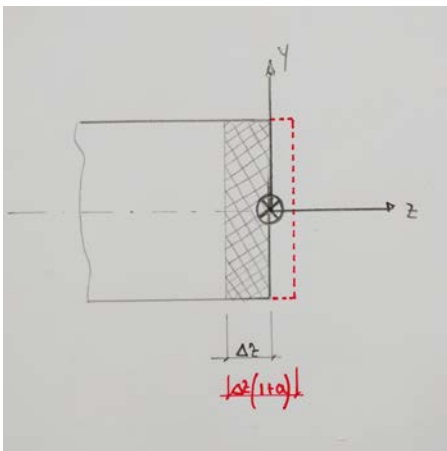
$$\varepsilon_z = a + bx + cy$$

$$\text{con } \gamma_{yz}=0 \text{ e } \gamma_{zx}=0$$

Analizziamo i tre contributi di  $\varepsilon_z$  separatamente:

- **$\varepsilon_z = a$**

Consideriamo, come visibile in figura, solo la “fetta” della trave di spessore  $\Delta z$ . Questa, in seguito alla deformazione assiale costante, subirà un allungamento  $\Delta z \cdot \varepsilon_z = \Delta z \cdot a$ ,



quindi la lunghezza totale della “fetta” di trave diventerà  $\Delta z(1+a)$ .

Con le IPOTESI di Stato Monodimensionale di Tensione (pura trazione), Materiale Isotropo e Coefficiente di Poisson  $\nu$  costante, avremo:

$$\sigma_z = E(x, y) \cdot \epsilon_z = E(x, y) \cdot a ;$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0 ;$$

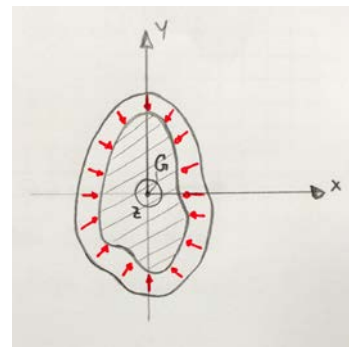
$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 ;$$

Inoltre, come conseguenza dell’*Effetto Poisson*, avremo per le deformazioni libere le seguenti espressioni:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu\epsilon_z ;$$

dove il segno meno è dovuto alla strizione

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 ;$$



La *Risultante di Sforzo Normale N* è definito come:

$$N = \iint \sigma_z dA \Rightarrow N = \iint E(x, y) \cdot a dA = a \cdot \iint E(x, y) dA = a \cdot E_{medio} \cdot A ;$$

e per definizione applicato al Baricentro  $G$ . In generale scriviamo le coordinate di  $G$  come:

$$x_G = \frac{\iint E(x, y) \cdot x dA}{\iint E(x, y) dA}$$

$$y_G = \frac{\iint E(x, y) \cdot y dA}{\iint E(x, y) dA}$$

Se poi abbiamo un Modulo di Young  $E$  uniforme sulla sezione:

$$x_G = \frac{\iint x dA}{\iint dA} ; y_G = \frac{\iint y dA}{\iint dA}$$

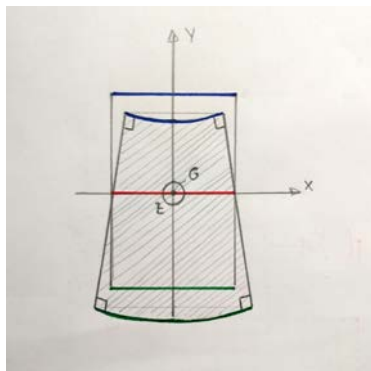
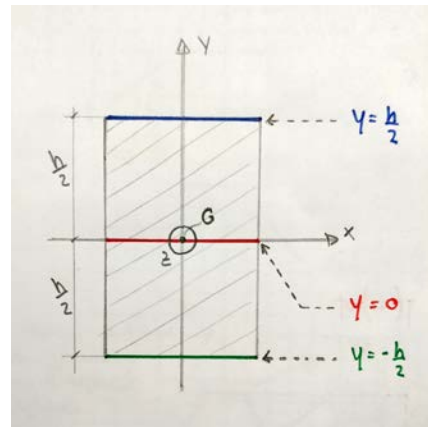
•  $\varepsilon_z = cy$  (caso lineare in y)

Per semplicità consideriamo una trave a sezione rettangolare. In questo caso, come visibile in figura, la deformazione  $\varepsilon_z$  varierà con la quota y, assumendo i seguenti valori:

$$\text{per } y = h/2 \rightarrow \varepsilon_z = c \cdot \frac{h}{2}; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = v \cdot c \cdot \frac{h}{2};$$

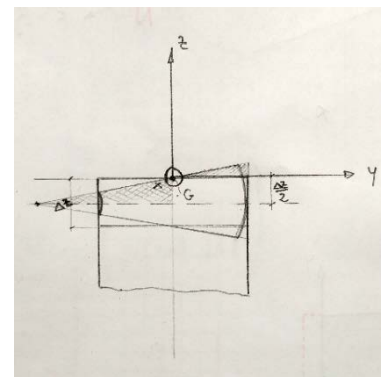
$$\text{per } y = 0 \rightarrow \varepsilon_z = 0; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0;$$

$$\text{per } y = -h/2 \rightarrow \varepsilon_z = -c \cdot \frac{h}{2}; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -v \cdot c \cdot \frac{h}{2}$$



La deformata in prima approssimazione potrebbe sembrare un trapezio, ma in realtà non può esserlo poiché ciò implicherebbe sforzi di tipo tagliente. Quindi la deformata reale è quella visibile in figura, da notare la conservazione dell'angolo retto.

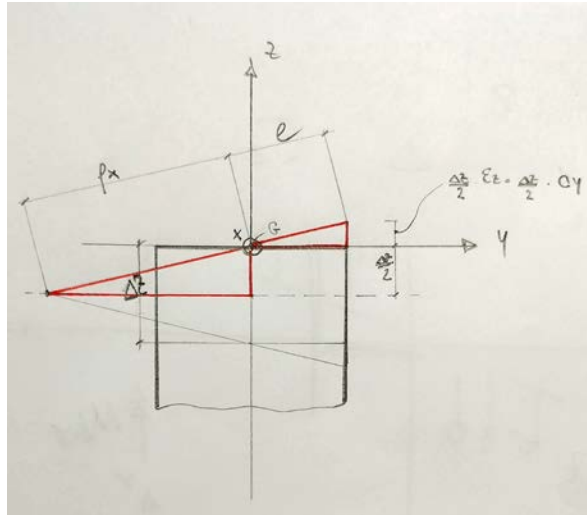
Mettendoci sul piano yz, troviamo il significato fisico del coefficiente  $c$ . In seguito alla deformazione è possibile distinguere due triangolo simili, uno con ipotenusa  $l$  e cateto minore  $\frac{\Delta z}{2} \cdot cl$ , e l'altro con ipotenusa  $\rho_x$  (raggio di curvatura) e cateto minore  $\frac{\Delta z}{2}$ .



Dalle proporzioni tra i due triangoli otteniamo la relazione:

$$\left(\frac{\Delta z}{2} \cdot cl\right) : l = \left(\frac{\Delta z}{2}\right) : \rho_x$$

da cui ricaviamo che  $c = \frac{1}{\rho_x}$ , possiamo dunque indicare con  $c$  la *curvatura della deformata*.



La *Caratteristica di Sollecitazione* relativa alla deformazione  $\epsilon_z = cy$  sarà:

$$N_c = \iint \sigma_z dA = \iint E(x, y) \cdot c \cdot y dA = 0$$

nulla perché il sistema di riferimento, in particolare  $y$ , è baricentrico e i contributi trattivi per  $y > 0$  sono compensati dai contributi compressivi per  $y < 0$ .

Poiché è la curvatura che induce un Momento Flettente e non il contrario, definiamo di seguito i due momenti che agiscono sulla superficie perpendicolare all'asse  $x$ :

$$\begin{aligned} M_{c,x} = M_{x,x} &= \iint \sigma_z \cdot y dA = \iint E(x, y) \cdot c \cdot y^2 dA = \iint E(x, y) \cdot \frac{1}{\rho_x} \cdot y^2 dA \\ &= \frac{1}{\rho_x} \cdot E_{medio} \cdot J_{xx} \end{aligned}$$

con  $(E_{medio} \cdot J_{xx})$  *rigidezza equivalente*.

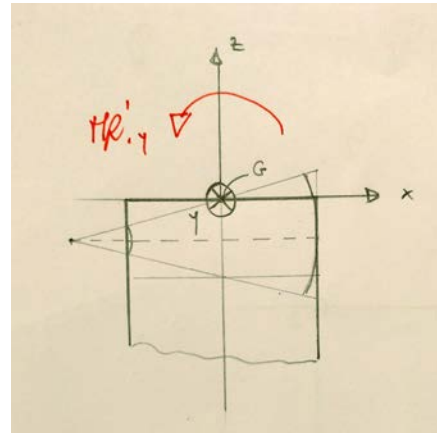
$$\begin{aligned} M_{c,y} = M_{x,y} &= \iint \sigma_z \cdot (-x) dA = \iint E(x, y) \cdot c \cdot y \cdot (-x) dA \\ &= \iint E(x, y) \cdot \frac{1}{\rho_x} \cdot y \cdot (-x) dA = -\frac{1}{\rho_x} \cdot E_{medio} \cdot J_{xy} \end{aligned}$$

con  $(E_{medio} \cdot J_{xy})$  *rigidezza equivalente*.

Da notare che  $M_{x,y}$  è chiamato *Momento Misto*.

- $\varepsilon_z = bx$  (caso lineare in x)

Continuando a considerare la sezione rettangolare con una deformata simile alla precedente (allungamento per  $x > 0$  e accorciamento per  $x < 0$ ), osserviamo dalla figura che per il dato sistema di riferimento, otterremo un *Momento Flettente rispetto a y* negativo ( $M_{f,y}'$  visibile in figura). Per ottenere un  $M_{f,y}$  positivo, come definito nel piano  $\pi$  della sezione di trave considerata (vedi introduzione), imponiamo la curvatura  $b = -\frac{1}{\rho_y}$ .



Poiché, in questo modo, abbiamo le stesse condizioni del caso precedente (deformazione lineare in y), applicando gli stessi passaggi abbiamo le seguenti *Caratteristiche di Sollecitazione*:

$$N_b = \iint \sigma_z dA = \iint E(x, y) \cdot b \cdot x dA = 0$$

$$M_{b,y} = M_{y,y} = \iint \sigma_z \cdot (-x) dA = \frac{1}{\rho_y} \cdot E_{medio} \cdot J_{yy}$$

$$M_{b,x} = M_{y,x} = \iint \sigma_z \cdot y dA = -\frac{1}{\rho_y} \cdot E_{medio} \cdot J_{xy}$$

con  $E_{medio} \cdot J_{yy}$  rigidezza equivalente.

- **Deformazione derivante dalle due curvature**

In presenza delle due curvature si applica la sovrapposizione degli effetti per calcolare il *Momento Flettente Totale rispetto a x e y*:

$$\begin{cases} M_{f,x} = 1/\rho_x \cdot (E_{medio} \cdot J_{xx}) - 1/\rho_y \cdot (E_{medio} \cdot J_{xy}) \\ M_{f,y} = -1/\rho_x \cdot (E_{medio} \cdot J_{xy}) + 1/\rho_y \cdot (E_{medio} \cdot J_{yy}) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} M_{f,x} \\ M_{f,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{medio} \cdot J_{xx} & -E_{medio} \cdot J_{xy} \\ -E_{medio} \cdot J_{xy} & E_{medio} \cdot J_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\rho_x \\ 1/\rho_y \end{bmatrix}$$

con  $\begin{bmatrix} E_{medio} \cdot J_{xx} & -E_{medio} \cdot J_{xy} \\ -E_{medio} \cdot J_{xy} & E_{medio} \cdot J_{yy} \end{bmatrix}$  *Matrice di Rigidezza Equivalente*.

○ **Risalire alla deformazione  $\varepsilon_z$  noto  $M_f$**

Considerando l'ultima equazione matriciale è possibile risalire alla *curvatura*, ricordando che l'inversa di una matrice 2x2 vale:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

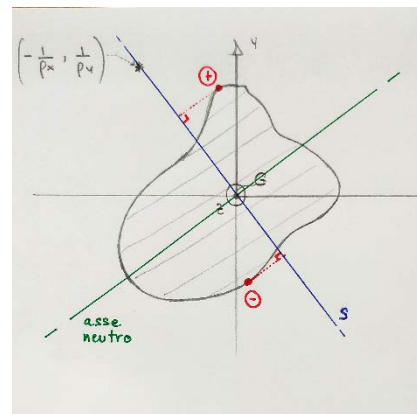
Ricaviamo quindi il *Vettore Curvatura*:

$$\begin{bmatrix} 1/\rho_x \\ 1/\rho_y \end{bmatrix} = \frac{1}{[(E_{medio} \cdot J_{xx}) \cdot (E_{medio} \cdot J_{yy}) - (E_{medio} \cdot J_{xy})^2]} \cdot \begin{bmatrix} E_{medio} \cdot J_{yy} & E_{medio} \cdot J_{xy} \\ E_{medio} \cdot J_{xy} & E_{medio} \cdot J_{xx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{f,x} \\ M_{f,y} \end{bmatrix}$$

Adesso possiamo procedere al calcolo della deformazione  $\varepsilon_z$ :

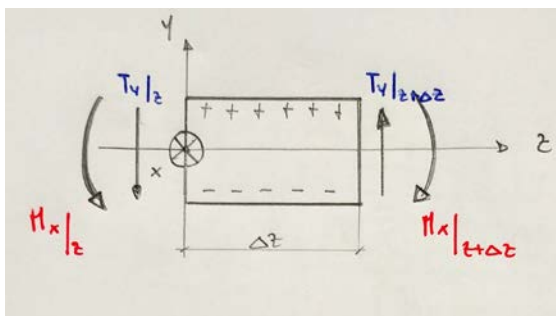
$$\varepsilon_z(x, y) = \begin{bmatrix} -1/\rho_y & 1/\rho_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Quindi noto  $M_f$  trovo le *curvature*, e da queste traccio la retta  $s$  passante per il *baricentro*  $G$  e il punto di coordinate  $(-1/\rho_y; 1/\rho_x)$ . I punti appartenenti alla sezione la cui proiezione su  $s$  è massima rispetto a  $G$  saranno i punti di massima deformazione. Quindi la retta  $n$  perpendicolare a  $s$  e passante per  $G$  è l'*asse neutro* della sezione.



## Introduzione al Taglio

La sollecitazione a *Taglio* induce una variazione di *Momento Flettente*. Consideriamo un concio di trave di lunghezza  $\Delta z$  bidimensionale (con asse  $z$  asse della trave) sollecitato a *Taglio*. Per equilibrio alla rotazione avremo due *Momenti*  $M_f(z)$  e  $M_f(z + \Delta z)$ .

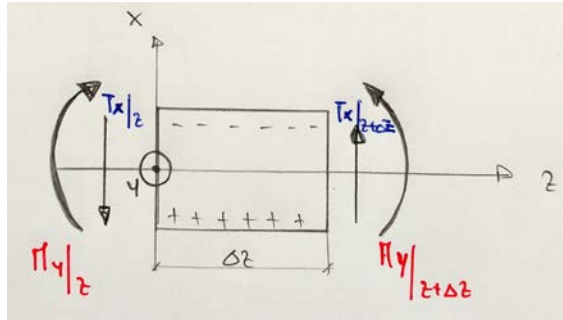


Dall'equilibrio alla rotazione nel caso di *Taglio lungo y* avremo:

$$T_y = \frac{dM_x}{dz}$$

e nel caso di *Taglio lungo x* avremo:

$$T_x = -\frac{dM_y}{dz}$$



Le figure relative al *Taglio* sono state ricavate dalle formule viste a lezione

Nell'IPOTESI di *materiale omogeneo isotropo*, la *tensione*  $\sigma_z$  è funzione di:

$$\sigma_z = f(x, y, M_x, M_y, J_{xx}, J_{yy}, J_{xy})$$

Derivando in funzione di  $z$  otteniamo:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = f\left(x, y, \frac{dM_x}{dz}, \frac{dM_y}{dz}, J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}\right) = f\left(x, y, T_y, -T_x, J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}\right)$$

valido  $\forall x, y$  sulla sezione.

Vediamo una correlazione tra il *Taglio* e la *variazione di  $\sigma_z$  lungo  $z$* .

## Autori e carico orario

Ore dedicate alla stesura/revisione degli appunti di questa lezione<sup>1</sup>.

| Autore/Revisore       | Prima stesura | Revisione | Seconda stesura | Totale |
|-----------------------|---------------|-----------|-----------------|--------|
| Alessandro Corticelli | 5h            |           |                 |        |
| Federico Ceccolini    | 5h            |           |                 |        |
| Nicola Rocchia        | 5h            |           |                 |        |
| Revisore 1            |               |           |                 |        |
| Revisore 2            |               |           |                 |        |
| Revisore 3            |               |           |                 |        |
| <b>Totale</b>         | 15h           |           |                 |        |

<sup>1</sup> La sezione relativa ai revisori è da compilarsi a cura del curatore.