**STATO TENSIONALE (Cubetto di trave)**

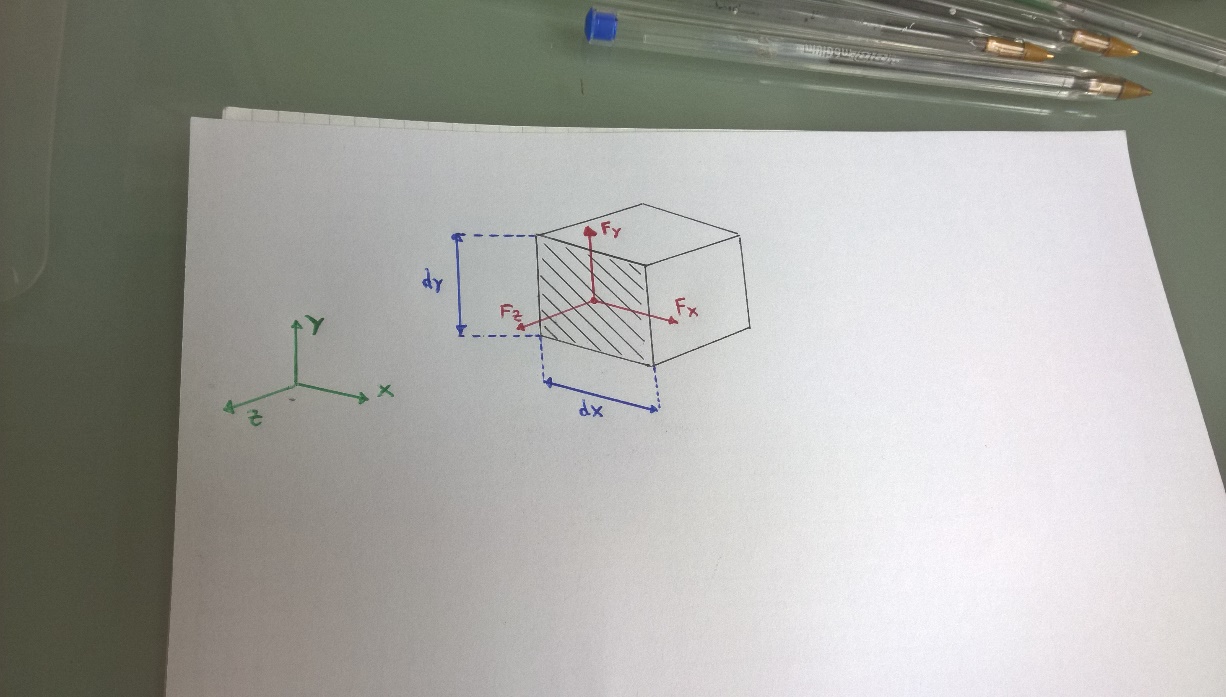
****

Figura 1: sezione di trave tensionata 3D

Nell’analisi non tratteremo le 3 facce nascoste ed, inoltre, considereremo le forze sull’area normale all’asse z applicate al centro del cubetto elementare, (definito da un punto e un sistema di riferimento).

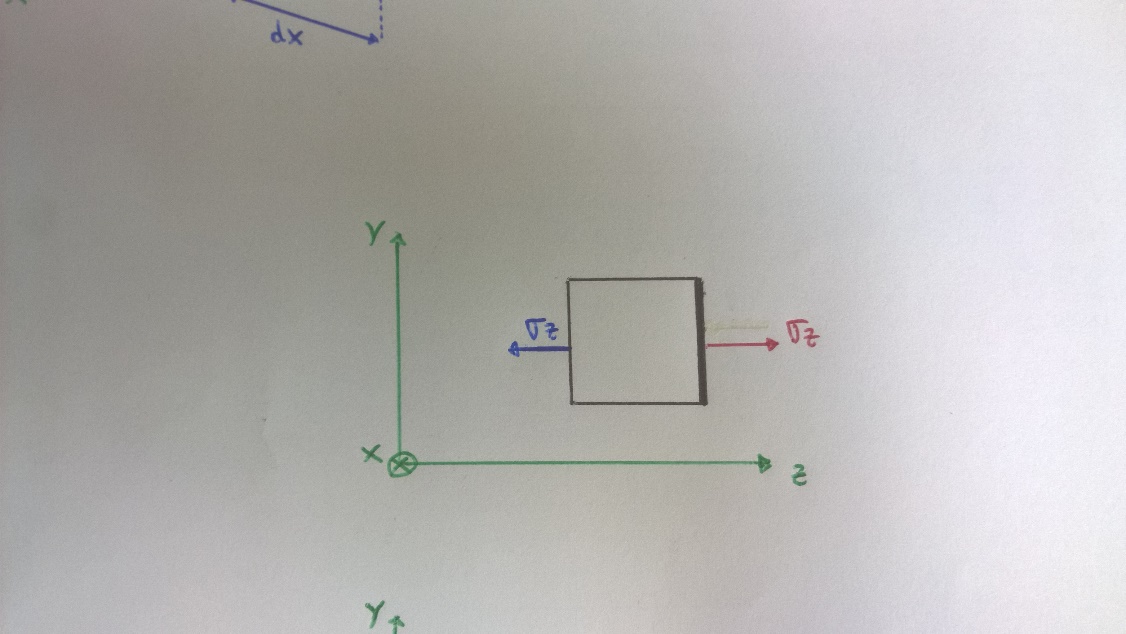
La forza *F* applicata sulla generica faccia del cubetto di area *dxdy* può essere scomposta nelle sue tre componenti rispetto al sistema di riferimento utilizzato: *Fx, Fy, Fz,* da cui si ricavano le tensioni:

* Tensione normale: [MPa]; (1)
* Tensione di taglio in direzione y: [MPa]; (2)
* Tensione di taglio in direzione x: [MPa]. (3)

Nella notazione a doppio pedice, il primo pedice indica la normale alla faccia su cui è applicata la tensione, il secondo indica la direzione di applicazione.

Considerando tutte e 6 le facce avrei 18 componenti tensionali. Sono tutte indipendenti tra loro?

Possiamo ragionare utilizzando la vista del cubetto nel piano Y-Z:

Prendendo come riferimento la faccia de cubetto dxdy normale a Z e considerando che su di esse ci sia applicata una tensione σz.

Per avere l’equilibrio alla traslazione orizzontale in direzione Z, dovremo applicare una tensione uguale e contraria alla σz precedentemente analizzata, sulla faccia opposta.

Figura 2 Equilibrio traslazione z

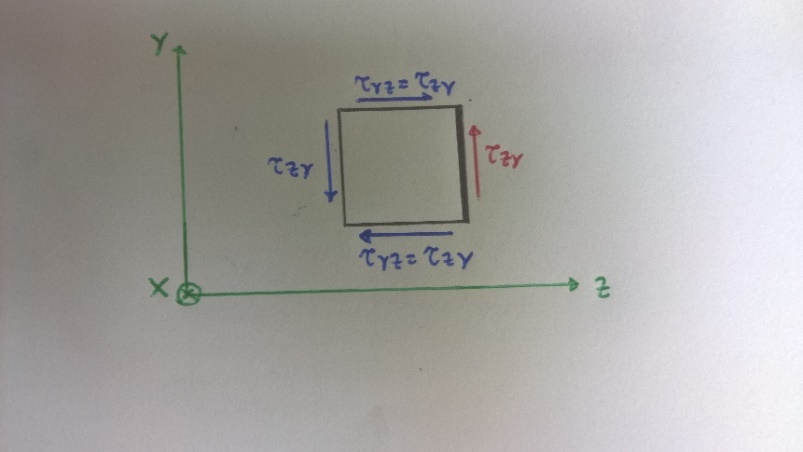
Allo stesso modo considerando la faccia dxdy normale a Z e considerando la tensione τzy.

Figura 3Equilibrio traslazione y

Per avere l’equilibrio alla traslazione verticale in direzione Y, dovremo applicare una tensione uguale e contraria alla τzy precedentemente analizzata, sulla faccia opposta.

A questo punto, per avere equilibrio alla rotazione del cubetto attorno al proprio asse in direzione X, occorre applicare una coppia di τzy uguali ed opposte, sulle altre due facce; per cui otteniamo: .

Estendendo il ragionamento appena visto agli altri due piani (X-Y e Z-X ), si vede che le 18 possibili tensioni diventano 6 indipendenti : σx, σy, σz, τxy, τyz, τzx.

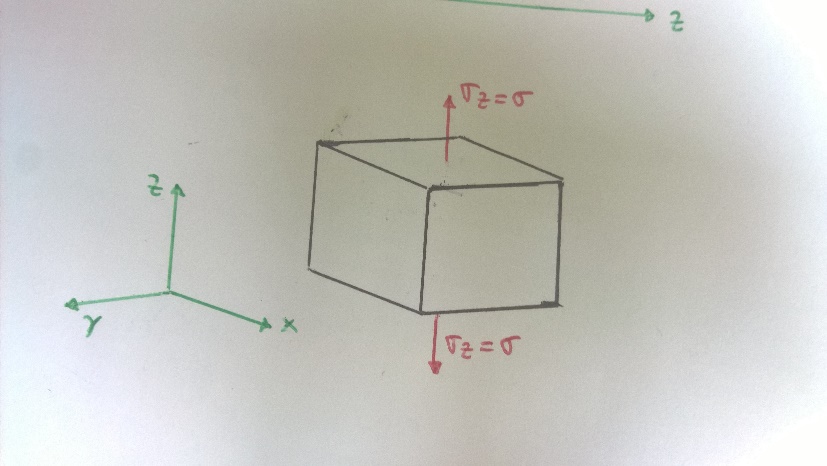
***TENSIONE EQUIVALENTE***

Per valutare se uno stato tensionale definito da 6 caratteristiche indipendenti è più o meno critico rispetto ad altro stato tensionale definito sempre da 6 caratteristiche indipendenti, abbiamo bisogno di ricondurci ad un unico valore scalare.

Il modo più semplice per ridurre la caratterizzazione dello stato tensionale in termini di 6 componenti ad un unico valere scalare, che in qualche modo possa essere utilizzato per descrivere la criticità dello stato tensionale stesso, è quello di definire una tensione equivalente.

**Tensione equivalente secondo Von Mises**

Ci si riconduce ad uno stato uniassiale di tensione equivalente:



(4)

Figura 4: tensione equivalente Von Mises

Si utilizza questo schema per semplicità e poiché riconducibile allo stato tensionale della prova di trazione. Quindi considerando il diagramma σ – ε si ha: σ = σz (unica tensione nel provino) ed ε = εz (deformazione rilevante nel provino, ma non l’unica).

A seconda dei valori assunti da σ si identificano 3 zone distinte del grafico:

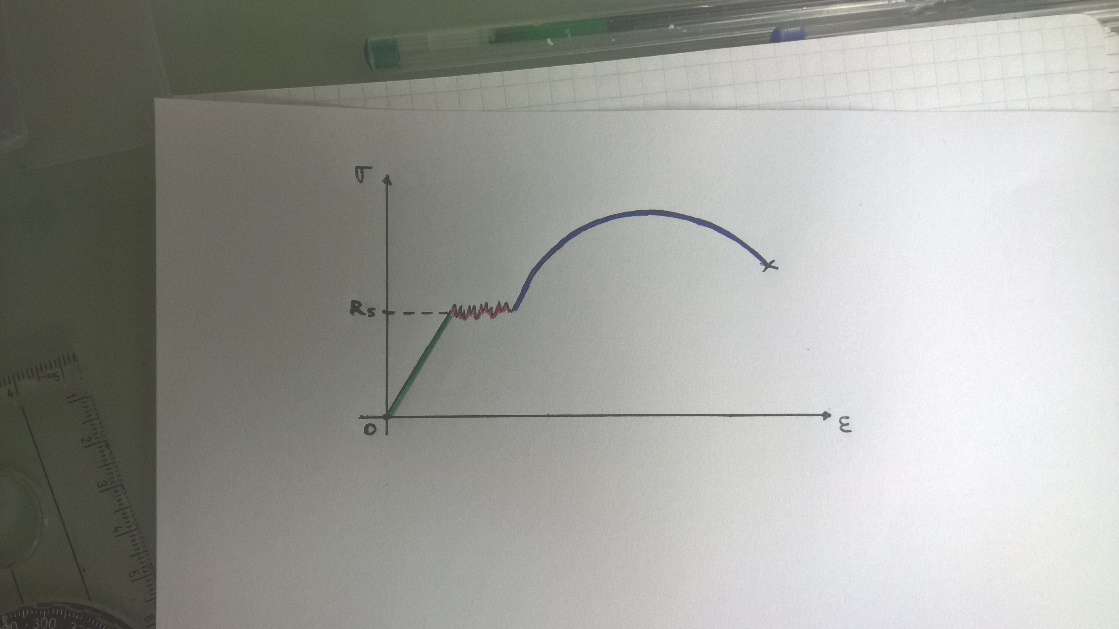


Figura 5 Diagramma prova trazione

* σ < Rs: zona lineare elastica, rappresentata in verde (con Rs tensione di snervamento);
* σ ≈ Rs: zona di transizione elasto-plastica, in rosso;
* σ > Rs: zona plastica, in blu.

L’equivalenza di Von Mises è sancita ai fini di fare considerazioni sulla condizione di snervamento. Quest’ultimo rappresenta il valore oltre il quale non posso più considerare veritieri i calcoli fatti considerando il materiale lineare elastico.

Tale condizione di equivalenza è stata creata per gli acciai e può essere utilizzata in generale per i metalli e per i polimeri strutturali.

**Osservazioni sperimentali sullo snervamento**

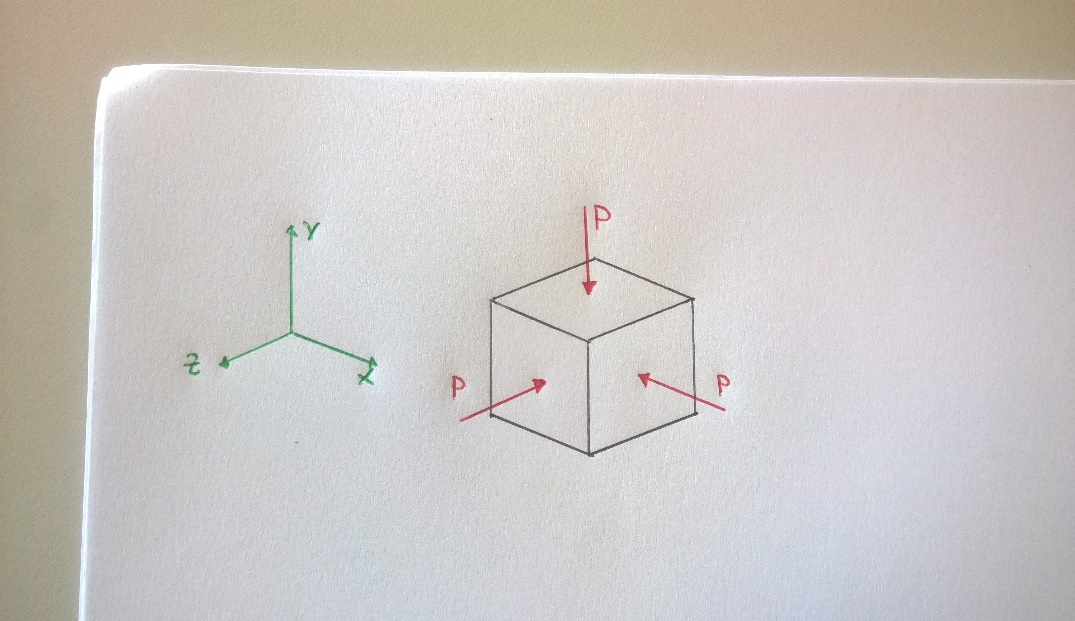


Figura 6 Stato idrostatico

1. Stato idrostatico: sulle facce del cubetto è applicata la pressione P. Abbiamo σx = σy = σz = P. In questo stato tensionale, non esiste alcun valore di P che porti a deformazione plastica il cubetto (non arriva mai allo snervamento). Si dice che questo cubetto deve avere criticità nulla allo snervamento ovvero σeq = 0.
2. Il rapporto tra le tensioni assiali e tangenziali: consideriamo a confronto uno stato uniassiale sollecitato da un’azione diretta σ, e uno stato puramente tagliante con sollecitazione di tipo . Si verifica che 2σeq,A = σeq,B (Tresca).



Figura 7 Tensioni assiali (A) tensioni tengenziali (B)

Lo stato tensionale B è doppiamente a rischio snervamento rispetto allo stato tensionale A, infatti:

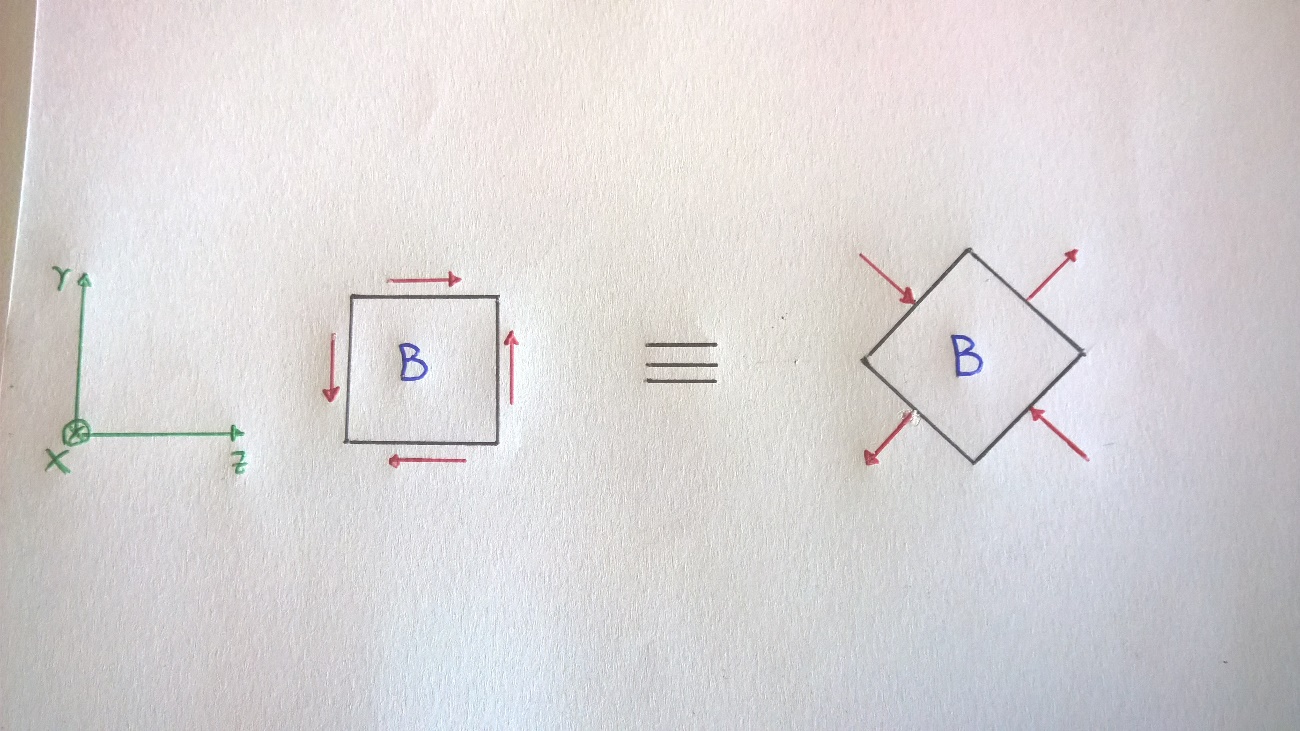


Figura 8 Equivalenza tensioni nel caso B

La tensione equivalente di Von Mises non rispetta queste due evidenze sperimentali, infatti, considerando la seconda situazione tensionale e supponiamo σeq,A = 100 MPa , risulta σeq,B = MPa. A differenza di Tresca si vede che anziché esserci un 2 c’è un tra le due tensioni equivalenti, si commette quindi un errore del 15% (valore accettabile).

**Tensione equivalente secondo Von Mises**

La tensione equivalente secondo Von Mises è espressa da:

(5)

Nonostante Von Mises non ricalchi perfettamente le evidenze sperimentali, commette un errore trascurabile per le nostre applicazioni. Inoltre tale criterio non considera il segno, quindi la criticità dello sforzo a compressione viene valutata uguale alla criticità dello sforzo in trazione. Valutando il carico di rottura di un provino a trazione si lavora comunque in sicurezza, in quanto a compressione risulta sempre maggiore.

Il criterio di Von Mises non è adatto a materiali fragili, specialmente ceramici (per essi si utilizza la tensione massima).

Tale criterio non è adatto inoltre per materiali compositi, in cui le fibre sono orientate. Prendendo, per esempio, un campione con fibre orientate lungo l’asse X, considerare σx = σy porta a sottostimare abbondantemente la criticità di σx. Inoltre non viene utilizzata nemmeno per materiali fragili.

Quindi, concludendo, la tensione equivalente di Von Mises è adatta allo studio di materiali isotropi in cui tutti gli assi sono critici allo stesso modo.

**Superficie a parete**

In realtà le 6 componenti di tensione sono presenti solamente su punti interni del corpo deformabile. Infatti considerando una faccia esterna del nostro cubetto, in particolare quella normale a Z, delle sei componenti di tensioni 3 sono implicitamente nulle ovvero:



Figura 9 Superficie a parete

(6)

Nel caso siano applicate forze dall’esterno sulla superficie considerata, le 3 componenti restano comunque molto più piccole rispetto alle altre 3:

(7)

Queste considerazioni sono vere salvo per alcuni casi, come ad esempio piste cuscinetti a sfera. Per il calcolo di incipiente di snervamento quindi si considerano solo le componenti tensionali che non lavorano sulla superficie esterna, ovvero quelle che lavorano entro il piano legato a tale superficie (nella superficie libera del corpo); infatti da qui partono eventuali cricche.

**STATO DEFORMATIVO**

Lo stato di deformazione risulta necessario per i calcoli e nei casi in cui sia fornito un target di deformazione massimo della struttura.

**Stato uniassiale di deformazione**

Preso un cubetto di trave, immaginiamo di applicare uno stato deformativo tale per cui il cubetto si elonghi da a , si verifica che:

(8)

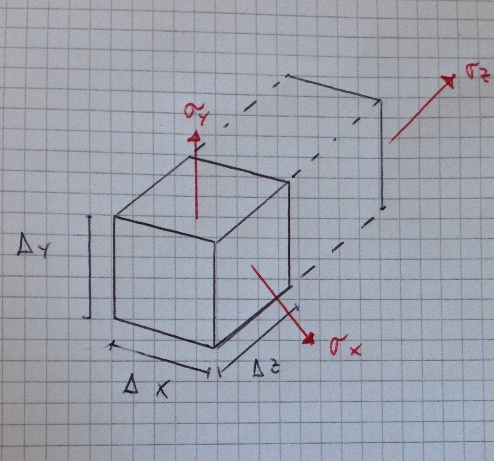


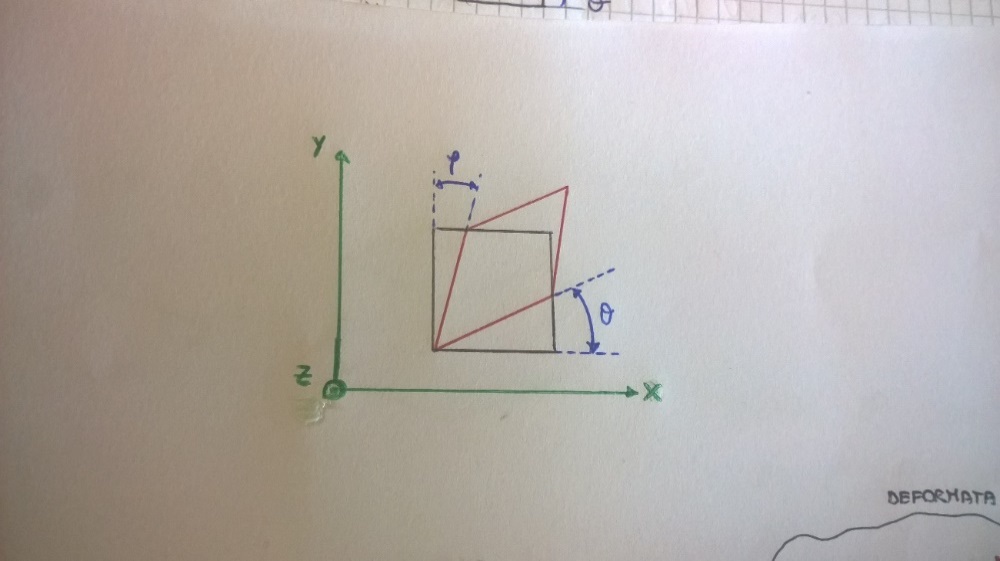
Figura 10 Deformazione cubetto

N.B. Al fine di avere questo tipo di deformazione devono agire contemporaneamente . Infatti applicando solo una σz si otterrebbe εz 0, ma al contempo si avrebbero anche εx eεy diverse da zero (allungamento lungo Z provoca strizione lungo X e Y).

Se il modulo di Poisson è diverso da 0, avere stato uniassiale di tensione non significa avere stato uniassiale di deformazione.

**Deformazioni taglianti**

Sono deformazioni per il quale si vanno a modificare gli angoli del nostro cubetto, ovvero si perde la natura ortogonale delle facce del cubetto nella deformata. Quando succede questo in una faccia normale a Z, otteniamo una deformazione legata ai 2 angoli :



(9)

= notazione ingegneristica

* In nero: indeformata
* In rosso: deformata

Le deformazioni di questo tipo sono 3 e sono indipendenti tra loro.

Figura 11 Deformazione tagliante

Tali deformazioni sono legate agli spostamenti.

Considerando lo spostamento di un punto P della sezione dovuto alla deformazione di taglio, si hanno le seguenti componenti:

* U: spostamento in X;
* V: spostamento in Y;
* W: spostamento in Z.

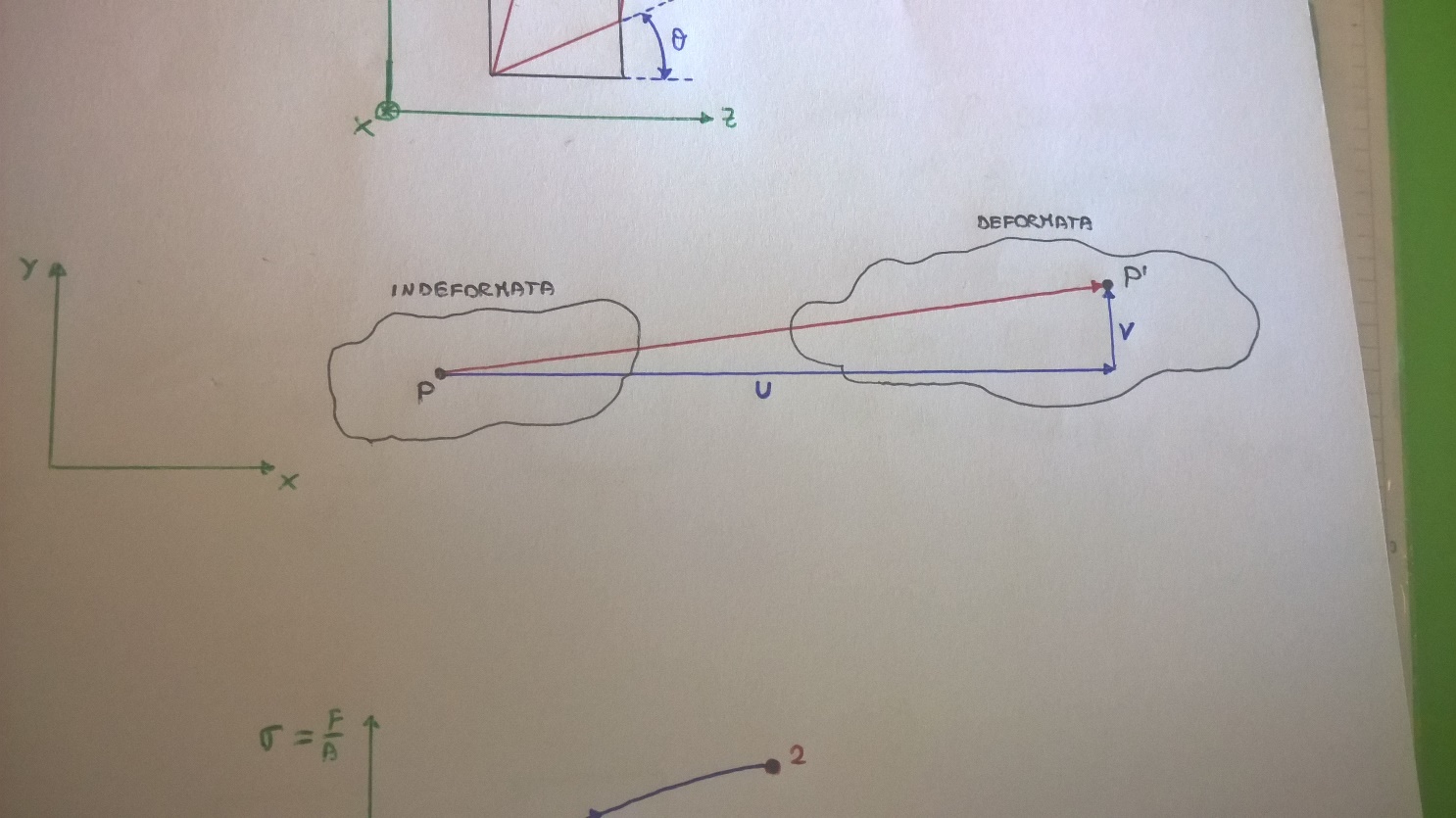


Figura 12 Spostamento punto P

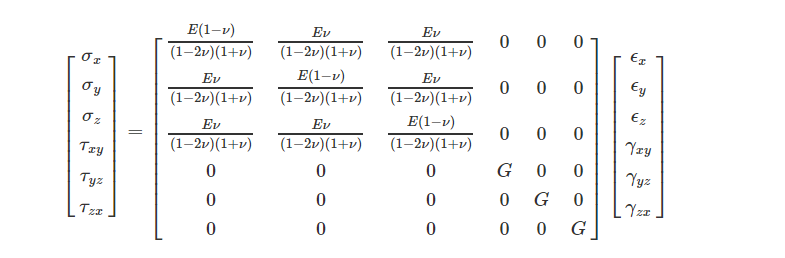
Sotto l’ipotesi di piccole rotazioni possiamo scrivere un legame tra deformazioni e spostamenti:

, , (10)

, , , (11)

**Legame sforzo deformazione**

Fino a che questo legame resta lineare elastico è rappresentabile mediante la forma matriciale:



(12)

G = modulo di taglio = (13) , con E = modulo di Young del materiale

Questa matrice è detta di legame costitutivo e definisce il legame lineare tra tensioni e deformazioni.

Esempio legame sforzo - deformazione lineare (elastico). Non presenta isteresi e deformazioni residue

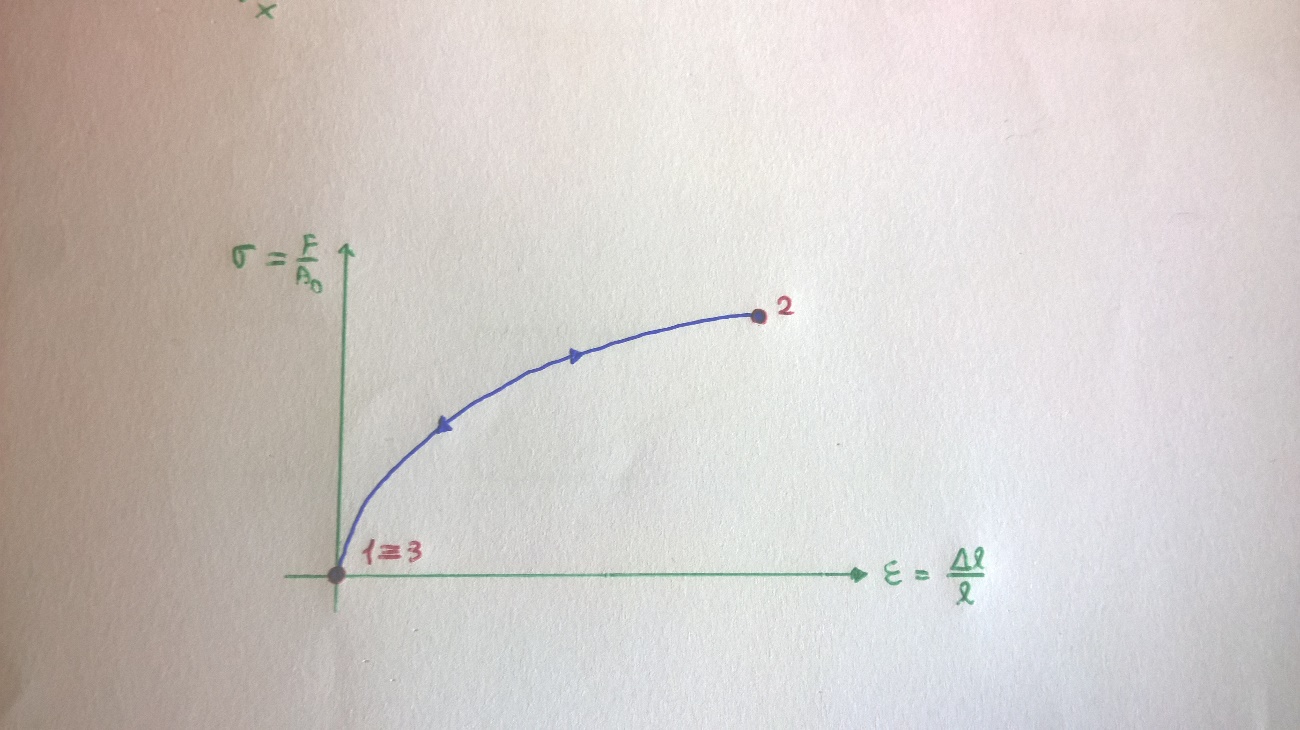
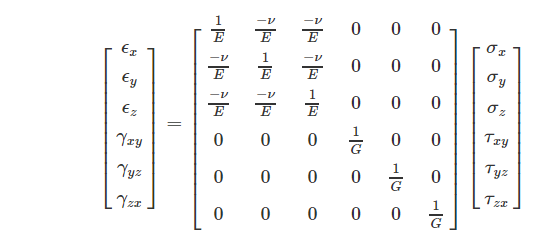


Figura 13Legame sforzo-deformazione lineare

Se invece il materiale considerato è isotropo o ortotropo con X, Y, Z assi di ortotropia la matrice diventa di questo tipo:



(14)

Ossia le σ non sono funzione delle γ e le τ non sono funzione delle ε, ovvero c’è un disaccoppiamento tra σ e γ e tra τ ed ε. Tale matrice è una matrice diagonale ossia in un materiale isotropo oppure ortotropo ognuna delle τ è funzione puramente delle deformazioni associate. Esiste la matrice inversa trovando cosi il legame tra deformazioni e tensioni.

# Appendici

## Lista dei simboli

|  |  |
| --- | --- |
| U, V, W | spostamenti del nodo P nelle direzioni *x*, *y*, *z* rispettivamente |
| σx σy σz | Sforzi assiali nelle direzioni *x*, *y*, *z* rispettivamente |
| τxy τyz τzx | Sforzi tangenziali |
| εx εy εz | Deformazioni assiali nelle direzioni *x*, *y*, *z* rispettivamente |
| γxy γyz γzx | Deformazioni tangenziali |
| σeq,V σeq,T | Sforzi equivalent di Von Mises e Tresca |
| θ, φ | Angoli deformazione tagliante |
| Δx,Δy,Δz | Dimensioni cubetto nelle direzioni *x*, *y*, *z* rispettivamente |
| Fx, Fy, Fz | Forze nelle direzioni *x*, *y*, *z* rispettivamente |

## Autori e carico orario

Ore dedicate alla stesura/revisione degli appunti di questa lezione[[1]](#footnote-1).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Autore/Revisore** | **Prima stesura** | **Revisione** | **Seconda stesura** | **Totale** |
| Micael Marzani | 5 |  |  |  |
| Davide Chiaravalloti | 5 |  |  |  |
| Andrea D’agrosa | 5 |  |  |  |
| Revisore 1 |  |  |  |  |
| Revisore 2 |  |  |  |  |

1. La sezione relativa ai revisori è da compilarsi a cura del curatore. [↑](#footnote-ref-1)