**RISPOSTA DINAMICA DI STRUTTURE ELASTICHE**

Una volta definite le matrici di massa e le matrici di rigidezza, se si assembla tutto, si ottiene un sistema lineare di equazioni differenziali a coefficienti costanti che definiscono l'equilibrio nodale:



(1)

dove:

* M è la matrice di massa, simmetrica e definita positiva;
* C è la matrice di smorzamento viscoso, simmetrica e semidefinita positiva;
* K è la matrice di rigidezza, simmetrica e semidefinita positiva: tale matrice può essere a termini complessi se si include una quota di smorzamento strutturale;
* F(t) è il vettore delle forza nodali applicate dall’esterno;
* x(t) è la risposta nel tempo del sistema, in particolare è il vettore delle accelerazioni, delle velocità ed *x*  degli spostamenti nodali;
* M= forza necessaria a vincere i contributi inerziali;
* C= forza necessaria a vincere i contributi viscosi;
* Kx = forza necesaria a mantenere la struttura in configurazione deformata (nel senso elastico)

Nel nostro caso chiamo questi “x” spostamenti, velocità, accelerazione, mentre in realtà la loro natura è più generica, gli vengono associati i gradi di libertà del sistema che possono sì essere spostamenti ma anche rotazioni.

Tra tutte le possibili forzanti ci si limita ad osservare le F(t) periodiche nel tempo, quindi scomponibili in serie di Fourier nelle varie componenti sinusoidali/cosinusoidali, dette armoniche. Senza perdere di generalità, ci si riferisce quindi ad una forzante sinusoidale sfruttando l'ipotesi di linearità; una volta calcolate le risposte delle singole componenti si uniscono con una combinazione lineare ottenendo così la risposta globale del sistema. Si sottolinea che ciò è possibile solo in ipotesi di linearità.



Dove f è un vettore ed ω la pulsazione nel tempo [rad/s] e j è la parte immaginaria.

N.b.  è la forzante realmente applicata al sistema ma per semplicità non faremo questa distinzione.

Tale oggetto è generalmente un numero complesso, quindi contiene una quota di forza reale e una quota di forza immaginaria, applicate, in ogni istante, ad ogni nodo. Si precisa che, considerando solo la quota reale di tale oggetto, e trascurando la parte immaginaria, i passaggi matematici risultano corretti, in quanto la forza realmente applicata ai nodi è solo la quota reale di quell'oggetto.

L'ipotesi di linearità serve per poter dire che a fronte di una forzante periodica corrisponda una soluzione del tipo

anch’essa periodica.

Ad esempio:

Se forzo la lamella con una forzante armonica, il suo comportamento è armonico perché è lineare.

Questo caso non è lineare e quindi non avrò risposta armonica.

Derivando e sostituendo nell’equazione





Tale scrittura rappresenta un sistema di equazioni dove x l’incognita che è un vettore che porta moduli e fasi della risposta, mentre f è il termine noto. Se nel sistema discretizzato vi erano n gradi di libertà, quanto ottenuto è un sistema di n equazioni in n incognite complesse: algebricamente, ha la complessità di un sistema 2n x 2n reale perché lo posso risolvere scomponendolo in parte reale ed immaginaria ovvero con 2n equazioni e 2n incognite. Data ampiezza e fase dell'eccitante per ogni nodo del sistema, risolvendo un sistema lineare di n equazioni in n incognite complesse, ovvero 2n equazioni in 2n incognite, considerando separatamente parte reale e parte immaginaria di ogni equazione e di ogni incognita, è possibile stabilire la risposta del sistema ad una data sollecitazione sinusoidale. Questo tipo di analisi si definisce ANALISI DI RISPOSTA IN FREQUENZA. L'aggiunta del termine "in frequenza" significa che tale analisi viene eseguita al variare della frequenza, infatti al variare di omega cambiano i termini della matrice del sistema e quindi varia il risultato. Di solito inoltre la omega è quella della eccitante. Una volta risolto il sistema avrete un vettore che descrive e la pulsazione armonica nel tempo (modulo e fase) di ogni grado di libertà. Se volete la parte reale di questa quantità, viene modulata per coseno di omega t , la parte immaginaria viene modulata per meno seno di omega t.

Il vettore X quindi sarà costituito da valori del tipo Re() +jIm(, ovvero:

 Adesso vediamo come varia la risposta in funzione di omega:

Per valori di omega piccoli (sistemi quasi­statici) il termine dominante è K, in quanto C cala con omega e M cala con il quadrato di omega.

Per valori di omega elevati, i termini dominanti sono quelli inerziali, che vanno con il quadrato della frequenza dell'eccitante.

Quindi, la risposta è modulata sulle alte frequenze per le componenti inerziali, sulle basse frequenze per le componenti di rigidezza.

**ANALISI MODALE**

Si vanno a ricercare i modi propri della struttura, ossia quei particolari moti periodici che sono ammessi dall'equazione 1 anche in assenza di forzante applicata.

Condizione necessaria affinché un moto possa perdurare in assenza di forzanti è l'assenza di dissipazione entro il sistema, per cui è necessario porre C = 0 nonché K reale, riducendoci alla forma algebrica:



Tale sistema ha soluzione non banale solo se la matrice è singolare, ossia il determinante della matrice del sistema è nullo per spostamento non nullo ( soluzione banale).

Al fine di andare a investigare l’esistenza di soluzioni diverse dalla banale ossia moti propriamente detti che sussistano in assenza di forzante esterna, il determinante di questa matrice dev’essere uguale a 0. Imponendo il determinante nullo si otterrebbe un polinomio di grado N irrisolvibile. Questo è un problema ben noto in geometria e algebra lineare che si può risolvere premoltiplicando per , infatti M\* mi da la matrice identità (I).

Il determinante è un polinomio in dove N è il numero di g.d.l. Si hanno tanti modi propri quanti il numero dei gradi di libertà.

 per

Così otteniamo:

Quello ottenuto è un problema agli autovalori generalizzato: riducendo la matrice massa ad una matrice identità, si ottiene un classico problema agli autovalori. Poiché la matrice massa è definita positiva, è sempre possibile calcolarne l'inversa e ricondursi ad un problema agli autovalori standard. Si determinano quindi gli autovalori  e gli autovettori con molteplicità mi dove .

Essendo la matrice non a rango pieno, la soluzione non è unica: è autovettore anche qualsiasi multiplo dell'autovettore trovato, in quanto gli autovettori sono sempre definiti a meno di una costante arbitraria. Inoltre, autovettori ed autovalori non nascono ordinati. Vengono ordinati sulla base dell'autovalore: gli autovalori vengono solitamente restituiti in ordine crescente in modulo. Di conseguenza, anche le frequenze vengono restituite in ordine crescente. Il primo autovettore è il primo modo proprio di una struttura ovvero quell'autovettore associato all'autovalore più basso, , la frequenza associata più bassa è .

In definitiva abbiamo tanti modi propri del sistema quanti sono i sui gradi di libertà. Sse abbiamo un sistema con 2 milioni di gdl abbiamo 2 milioni di modi propri e frequenze proprie. Se affiniamo la mash in quel sistema otteniamo 8 milioni di modi propri e frequenze proprie e quindi capite che non ha senso in un sistema discretizzato dal continuo pensarli tutti. Dal punto di vista meccanico, i fenomeni meccanici inducono un implicito taglio nelle frequenze ingegneristicamente rilevanti, quelle troppo elevate non sono riproducibili meccanicamente e quindi non sono comprese nelle nostre strutture.

Vediamo cosa accade eccitando un sistema smorzato alla i-esima frequenza propria (cioè con una forzante avente pulsazione esattamente uguale ad una delle pulsazioni proprie):



Dove *a* è un coefficiente arbitrario. Questo è un sistema di N equazioni in una incognita.

Se il sistema è in risonanza i termini di massa e di rigidezza si elidono a vicenda per quanto visto prima.

Risulta:



Quindi:



indica il rapporto tra termine di accoppiamento tra il modo proprio e l'eccitazione (ampiezza di oscillazione nulla solo se la forzante è ortogonale al modo proprio) e il termine di smorzamento. Il numeratore è nullo quando F è ortogonale al modo proprio.

Esempi di sistemi dinamici: il diapason

Si consideri un classico sistema dinamico: il diapason. Il diapason è un oggetto trabeiforme geometricamente simmetrico, questo porta ad avere modi propri simmetrici o antisimmetrici.

Il primo modo di vibrare è un moto simmetrico delle aste, circa 440Hz.



Il secondo modo è un moto antisimmetrico, moto coordinato delle aste insieme, leggermente più basso.



Nel seguito, si analizzano svariate condizioni di eccitazione e di smorzamento.

Con forzamento verticale ed uno orizzontale alla prima frequenza propria in un punto fermo nel primo modo di vibrare, nel prodotto scalare tra la forzante e il modo proprio, gli unici termini non nulli sono quelli di forzamento nelle due direzioni di quel nodo per gli spostamenti di quel nodo nelle due direzioni. Il loro prodotto però è nullo essendo nullo lo spostamento nelle due direzioni di quel nodo.



Pertanto, risulta che il sistema di forze, sia esso una forza verticale o orizzontale, è ortogonale all'autovettore associato al primo modo proprio. Non esistono gradi di libertà dove sono entrambi nulli, per cui il prodotto scalare possa avere un contributo non nullo.

Quando si ha un modo di vibrare della struttura, si hanno sempre dei nodi. Un nodo è un punto che, per un dato modo di vibrare, non si muove. Se si applica una forza al nodo, non si eccita il modo di vibrare perché, per eccitare il modo di vibrare, è necessario compiere lavoro sullo spostamento associato al modo. Se si applica una forza ad un punto fermo, non si compie lavoro, quindi non si fornisce energia al sistema; pertanto, non si può eccitare quel modo.

Per eccitare il modo di vibrare è necessario far compiere lavoro sul nodo cui è applicata la forzante.

Allo stesso modo, applicando un sistema di forze antisimmetrico su una struttura che ha modo proprio simmetrico, a quella determinata frequenza, il lavoro immesso da una parte viene sottratto dall'altra e il numeratore che determina l'ampiezza è nullo, non eccita quindi il modo proprio.

Viceversa un sistema di forze non antisimmetrico, quindi simmetrico o non simmetrico, è in grado di eccitare il sistema alla sua frequenza propria.

Finora, si è analizzato il numeratore del rapporto:



Adesso si consideri il denominatore del medesimo rapporto.

Ovviamente, qualora non ci sia smorzamento, C è nullo, dando quindi una risposta infinita appena il numeratore è diverso da zero. Per avere *a* nullo quindi è necessario avere anche il numeratore nullo. Ciò avviene quando f è perpendicolare ad x trasposto.

Si consideri ora un sistema che presenta uno smorzatore che non viene coinvolto nel primo modo proprio; esso non lavora quando si eccita il sistema a quel modo (è quel che accade quando lo si afferra con le mani) quindi non dissipa energia al primo modo..





Questo tipo di smorzatore agisce però sul secondo modo, al quale sottrae energia.

Questo è il motivo per cui il diapason genera un suono così pulito: tenendolo in mano smorziamo tutti i modi del sistema tranne uno, che vibrando genera il suono.

Viceversa ponendo uno smorzatore tra le aste a sbalzo, questo sottrae energia al primo modo di vibrare mentre non è in grado di assorbire energia dal secondo modo di vibrare.

Generalmente in assenza di smorzamento non è possibile definire una grandezza di risposta finita, quindi non è possibile definire n’entità di stato tensionale finita o un’entità di oscillazione finita, , salvo il caso particolare in cui la forzante pure non è un in grado di inserire energia nel sistema.



L’analisi modale è utilizza perché come primo risultato vi dà le frequenze proprie e i modi propri e vi dà possibilità di analizzare quali sono le condizioni di risonanza del vostro sistema, che pulsazioni hanno, che frequenze ho alle varie risonanze e sulla base del modo proprio associato ad ogni risonanza andare a vedere se dato un sistema di forze noto a priori è in grado di somministrare lavoro al sistema su quel modo proprio e quindi eccitare quella risonanza fino a dare risposta potenzialmente infinita (o elevata nel caso abbia un minimo di smorzamento).

Siccome i modi propri sono definiti a meno di una costante essi posso essere normalizzati. Tra i vari metodi di normalizzazione, quello che vedremo è la “norma a massa unitaria”. L’idea è questa: prendo i modi propri e definisco una norma e scalo gli auto vettori fino a che la norma massa così definita sia unitaria.

XiT \*M\*Xi=1 oppure XiT\*K\* Xi=ωi2

Altre proprietà sono:

XiT \*M\*Xj=0 con

XiT \*K\*Xj=0 con

XiT \*C\*Xj>0 con

Il modo proprio e la frequenza propria dicono a quali frequenze si possono avere le risonanze (questo viene indicato dalla frequenza propria) e se la forzante applicata è o meno ortogonale (se c'è o meno accoppiamento tra modo di vibrare ed eccitazione). Un'ulteriore cosa che permettono di fare è trasformare un sistema ad n gradi di libertà in n sistemi ad un singolo grado di libertà, molto più gestibili. Di seguito si riportano le condizioni di ortogonalità base per la matrice masse e rigidezza, valide per modi di vibrare che hanno autovalori distinti:



dove di Kronecher, che vale 0 se i è diverso da j e vale 1 se i è uguale a j. Si precisa che la condizione di ortogonalità non vale per gli autovettori: in generale, gli autovettori non sono ortogonali tra loro, ma sono ortogonali in base massa e in base rigidezza. L'ortogonalità base matrice identità non è valida.

 è

Questo ragionamento non è però sempre applicabile anche alla matrice di smorzamento C. Vale solo se vale il Teorema di Rayleigh per cui in condizioni di linearità

C = α\*M + β\*K

In tal caso allora è possibile normalizzare a base unitaria anche con la stessa scrittura usata per K e M.

In pratica, si impoverisce la matrice di smorzamento: così facendo, gli autovettori risultano ortogonali anche sulla matrice di smorzamento, essendo ortogonali in M e in K. La proprietà di ortogonalità si mantiene, in quanto C è combinazione lineare di M e di K, tuttavia essa è una condizione che difficilmente si riscontra pura nella realtà (eccetto il caso di smorzatori strutturali), ma sulla base della quale possono comunque essere modellati gli smorzamenti per semplificare notevolmente il sistema.

A questo punto se vale Rayleigh e le proprietà scritte di sopra è possibile diagonalizzare la matrice di sistema e quindi effettuare la somma delle risposte ottenute.

Il passo successivo è quello di considerare gli spostamenti della struttura come sommatoria dei modi di deformazione associati al modo di un singolo gdl.

In particolare posso esprimerli come combinazione lineare dei vari spostamenti in base naturale:



Dove ogni colonna è moltiplicata scalarmente per il vettore e\_i di componenti ( 0,0,0,0,1……0).

Poiché tutti questi vettori sono, dalle proprietà di ortogonalità, linearmente indipendenti, questa matrice costituisce una base (un autospazio) per il sistema degli spostamenti, con la quale è possibile esprimere la configurazione deformata. In particolare, è possibile rappresentare gli spostamenti non più nella base naturale ma, per descrivere la configurazione deformata, è possibile scrivere la base per un sistema di coordinate  di cui però ne considero solo un sottosistema di m componenti per semplicità con m<n (quindi per ora abbiamo un sistema di n equazioni in m incognite).

Il vettore della deformata diventa:



dove  sono le coordinate modali.

Il primo elemento del vettore  non dice quanto si sposta in  il primo nodo, ma quanto il sistema si sposta secondo il primo modo proprio.

Usando le nuove coordinate per rappresentare un modo, le equazioni di equilibrio diventano:



Si hanno relazioni di ortogonalità su M, su K e su C in condizioni di Rayleigh.

Procedendo con una premoltiplicazione per XT, si ha:



Con vari passaggi si ottiene:



con:



vettore dei termini di accoppiamento;



Tutte le matrici ottenute sono diagonali, quindi la matrice del sistema, somma di matrici diagonali, è anch'essa diagonale. Questo fa si che le N equazioni che compongono il sistema siano tutte indipendenti.

In particolare, si hanno N equazioni nella seguente forma:



Questa equazione è la medesima di un oscillatore monodimensionale la cui forma completa è:



La penultima scrittura è la forma algebrica associata al sistema. L'ultima scrittura è la forma differenziale.

Il termine  è il cosiddetto damping ratio (rapporto tra lo smorzamento del sistema e lo smorzamento critico).

Essendo funzione di un indice i, la formula a cui si è giunti sta ad indicare che si ha un oscillatore per ogni modo proprio; quindi per ogni modo proprio, è possibile considerare l'oscillatore in forma indipendente. Una volta trovata l'oscillazione per ogni modo proprio, è possibile combinarli tutti ed ottenere così la risposta del sistema.

Per fare ciò, è necessario che i modi propri siano normalizzati rispetto a massa unitaria. (Il Marc restituisce i modi propri, scalati con entità a massa unitaria)

Senza la semplificazione della matrice di smorzamento non sarebbe stato possibile ottenere una semplificazione del sistema realizzata disaccoppiando le equazioni.