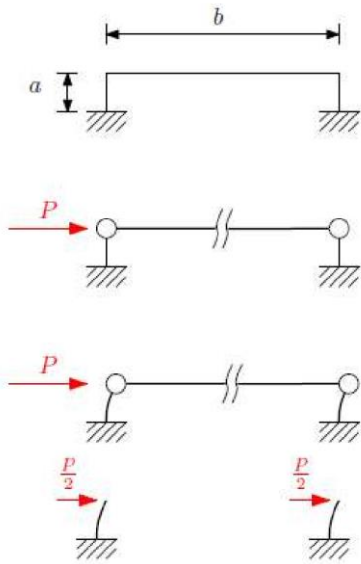


Considerazioni sul teorema di Castigliano

- **Caso 1: $a \ll b$**



La trave orizzontale mostra un'elevata deformazione flessionale, tuttavia reagisce rigidamente alla forza normale e quindi può essere approssimata come un'asta. Le due travi elastiche verticali lavorano in parallelo e il carico esterno P agente si divide equamente tra le due.

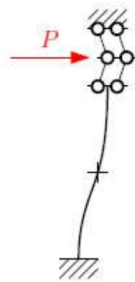
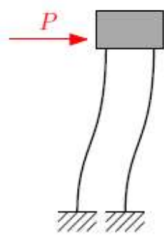
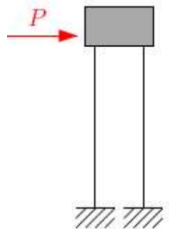
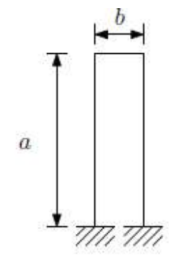
Si hanno le seguenti formule di cedevolezza dC e rigidità K , che corrispondono a quelle di una trave a sbalzo:

$$dC_{ref} = \frac{a^3}{3EJ} P$$

$$K_{ref} = \frac{3EJ}{a^3}$$

Queste verranno prese come valori di riferimento per considerare la rigidità delle strutture successive.

- **Caso 2: $a \gg b$**



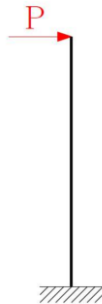
La trave orizzontale per la sua lunghezza limitata è rigida rispetto alla deformazione flessionale, quindi può essere considerata come un corpo rigido. Le travi verticali si deformano in modo simile a una struttura vincolata con un incastro ad una estremità e con un doppio doppio pendolo nell'altra estremità. In quest'ultima agisce il carico esterno come mostrato in figura.

In questo caso la rigidezza della struttura vale 4 volte la rigidezza di una trave a sbalzo:

$$K_{cantilever} = \frac{3EJ}{a^3}$$

$$K_{fixed-ddp} = 4 * K_{cantilever}$$

La rigidezza del Rollbar è 2 volte la rigidezza di questo tipo di struttura, quindi 8 volte superiore alla rigidezza di una trave a sbalzo del tipo:



• **Caso 3: b=0**

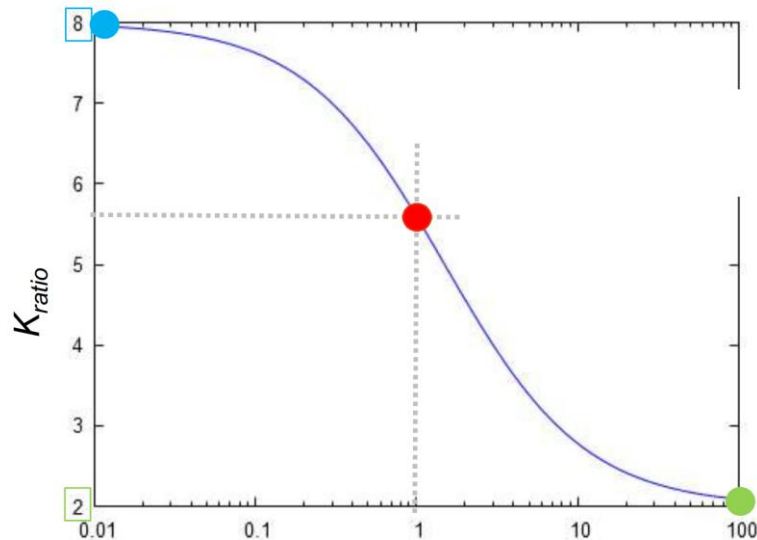


In questo caso le 2 travi verticali coincidono, quindi questo tipo di struttura avrà una rigidità doppia rispetto ad una singola trave a sbalzo.

Si definisce il rapporto tra la rigidezza del rollbar e quella di riferimento della trave a sbalzo:

$$K_{ratio} = \frac{K_{rollbar}}{K_{ref}} = \frac{dC_{ref}}{dC_{rollbar}} = \frac{dC_{ref}}{dC}$$

Si può mostrare l'andamento di questa rigidità in funzione del rapporto lunghezza/larghezza della struttura:



Centro di taglio

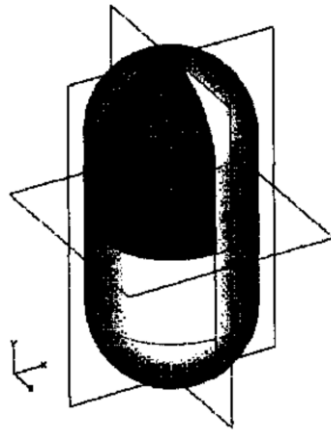
Possiamo avere 3 casi di sezioni trasversali:

- Almeno 2 piani di simmetria: baricentro e centro di taglio coincidono.
- Solo un piano di simmetria: baricentro e centro di taglio giacciono sull'asse di simmetria, ma questi 2 punti non coincidono.
- Se non si conosce il centro di taglio di una sezione, questo può essere ricavato tramite calcoli avanzati al computer oppure mediante modellazione degli elementi finiti (FEM).

Se una forza agisce sul centro di taglio questa non induce torsione, ma solamente flessione. Per travi a sezione trasversale con un solo asse di simmetria e una forza che agisce al di fuori del centro di taglio, la deformazione della trave è dovuta ad una combinazione di torsione e flessione.

Simmetria

Nella maggior parte dei casi, se si utilizzano più piani di simmetria per lo studio di una struttura, si avranno tempi di esecuzioni più brevi, condizioni al contorno più precise e di conseguenza si avranno anche delle soluzioni più accurate.



Qualsiasi modello 3D può avere un massimo di tre piani ortogonali, dove simmetria, proprietà e condizioni al contorno sono equivalenti lungo questi piani. Un oggetto ha una simmetria speculare se una linea che lo attraversa lo divide in due porzioni che sono l'uno il riflesso specchiato dell'altro.

Considerando una struttura con 3 piani di simmetria, questa può essere modellata analizzando solo 1/8 della struttura, purché la geometria e le condizioni al contorno siano uguali sui diversi piani.

Il carico applicato su una struttura simmetrica deve essere diviso in base al numero di piani di simmetria presenti. Quindi se ad esempio si hanno 2 piani di simmetria su una struttura su cui è applicata la forza F , la forza considerata sulla singola porzione è pari a $F/4$ se entrambi i piani di simmetria intersecano il punto di applicazione della forza. In caso un piano non intersechi il punto di applicazione della forza allora essa non potrà essere dimezzata nelle porzioni create da quel piano.

Le condizioni di contorno si devono impostare in modo da simulare la presenza della restante parte della struttura rimossa.

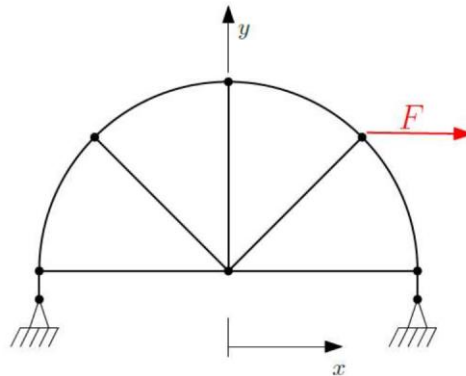
Consideriamo ora i vincoli che definiscono le condizioni di simmetria:

- Un modello solido deve prevenire la traslazione lungo il piano di simmetria sull'intero piano di taglio, in modo che la porzione considerata non possa compenetrare la restante parte di struttura che stiamo trascurando.
- Si deve impedire la rotazione rispetto alle componenti parallele al piano di taglio, per lo stesso motivo precedente.

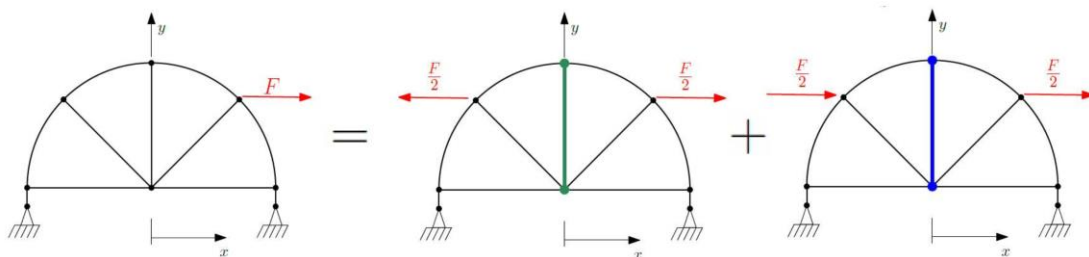
Questi vincoli assicurano tangenza e continuità sul piano di taglio, come sarebbe l'altra metà del modello se esistesse.

Anti-simmetria.

La tecnica di anti-simmetria può essere usata quando la struttura è simmetrica solo geometricamente, ma non lo è dal punto di vista dei carichi applicati. Ad esempio:



Questa struttura può però essere vista come una struttura simmetrica e trattata con i vincoli di anti-simmetria. La struttura può essere divisa nel modo seguente:



Ora si bloccano tutti i gradi di libertà (imponendoli quindi tutti i possibili spostamenti uguali a zero) e si applicano le condizioni di simmetria “sbloccando” i gradi di libertà. Tutto quello che è bloccato nella simmetria è sbloccato nell’anti-simmetria. Si trovano in questo modo le condizioni di anti-simmetria:

$$\begin{aligned} u_x &= 0 \\ u_y &\neq 0 \\ u_z &\neq 0 \\ \theta_x &\neq 0 \\ \theta_y &= 0 \\ \theta_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &\neq 0 \\ u_y &= 0 \\ u_z &= 0 \\ \theta_x &= 0 \\ \theta_y &\neq 0 \\ \theta_z &\neq 0 \end{aligned}$$