

Richiami : Taglio e sezione sottili

Si consideri una trave su cui agisce il momento flettente:

momenti d'inerzia

$$\overline{EJ}_{xx} = \int_a E(x,y) y^2 da \quad \overline{EJ}_{xy} = \int_a E(x,y) xy da = 0 \text{ se assi } x,y \text{ principali d'inerzia}$$

(es. se x o y è un asse di simmetria)

$$\overline{EJ}_{yy} = \int_a E(x,y) x^2 da$$

oppure $\overline{E}_{yy} \cdot J_{yy}$...

se materiale omogeneo

$$\overline{E}_{xx} = \overline{E}_{yy} = \overline{E}_{xy} = E(x,y) = E \quad \forall x,y \in a$$

Barber, J.R. intermediate mechanics of materials

materiale a modulo elastico $E(x,y)$

assi LOCALI x', y', z
con z localmente tangente ad asse baricentrico

curvature:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{M_{xx} \overline{EJ}_{yy} + M_{yy} \overline{EJ}_{xy}}{(\overline{EJ}_{xx} \overline{EJ}_{yy} - \overline{EJ}_{xy}^2)}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{M_{yy} \overline{EJ}_{xx} + M_{xx} \overline{EJ}_{xy}}{(\overline{EJ}_{xx} \overline{EJ}_{yy} - \overline{EJ}_{xy}^2)}$$

Il raggio di curvatura rispetto ad x è definito in funzione dei due momenti flettenti m_x e m_y , delle caratteristiche di rigidezza a flessione della sezione e del materiale (nel caso non sia decomponibile in due contributi - Modulo di Young non uniforme).

L'allungamento in direzione z è proporzionale ad x ed y (coordinate lungo la sezione) e i fattori di proporzionalità sono $1/\rho_x$ per quanto riguarda y e $1/\rho_y$ per x .

Se il materiale è uniforme, l'aggiunta del contributo dovuto allo sforzo normale sarà N/EA con l'ipotesi che E sia uniforme.

Solo nel caso di un materiale omogeneo e isotropo lo scorrimento è nullo.

$$\epsilon_z = \frac{y}{R_x} - \frac{x}{R_y} \quad , \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Per la flessione non si hanno problemi nella trattazione di un materiale che non sia omogeneo ed isotropo, perché si sfrutta la natura ortotropa del materiale.

Nel caso di taglio e torsione per evitare una trattazione eccessivamente complicata e specialistica, si ritiene utile porre le seguenti ipotesi:

- 1) Il materiale è omogeneo ed isotropo (non specifico la direzione di definizione di E);
- 2) E (modulo di Young) non dipende da x e y ;

Grazie all'isotropia del materiale la rigidità è uguale in tutte le direzioni; inoltre se E_z è uniforme, posso scindere i prodotti EJ^{**} , così da poter eliminare E_z dall'espressione di σ_z . Ottengo l'espressione della tensione flessionale in funzione del momento flettente e delle caratteristiche della sezione.

Perciò il rapporto tra il momento flettente e la tensione da momento flettente, per il caso di materiale isotropo omogeneo, non dipende da parametri che sono funzione dello specifico materiale e non varia.

Stato tensionale $\sigma_z = E(x,y) \cdot \epsilon_z \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \phi$

su materiale omogeneo

$$\sigma_z = \frac{(M_x J_{yy} + M_y J_{xy}) \cdot y - (M_y J_{xx} + M_x J_{xy}) \cdot x}{(J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2)}$$

Assumo l'ipotesi di materiale elastico lineare:

$$\sigma_z = E_z \epsilon_z$$

Avendo deciso di trattare lo sforzo normale separatamente, se considero una flessione pura; quindi è la sola sollecitazione dovuta al momento flettente, senza taglio: il baricentro non si allunga, non si accorcia e non si tensiona.

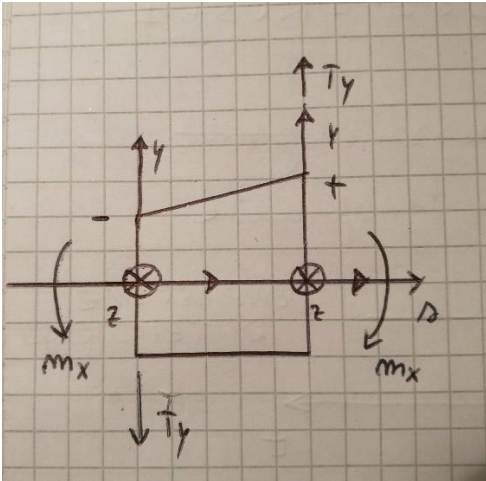
L'asse neutro è il luogo di punti a deformazione assiale nulla e in questo caso anche a tensione assiale nulla e deve passare per il baricentro; quindi non è necessario porsi il problema di trovare un punto di passaggio.

Si può individuare l'asse neutro facilmente, perché in questo caso passa per il baricentro e giace sulla sezione. In genere si definisce la normale alla sezione la cui coordinata è in funzione dei momenti flettenti e dei momenti d'inerzia, solitamente si cerca di ottenere dei valori adimensionali.

Si può osservare che alla flessione non uniforme viene associato un taglio.

La relazione tra momento flettente e taglio è legata all'equilibrio di forze sulla trave.

In particolare si prende in esame un concio di trave con asse di ascissa curvilinea s orientata come in figura:



Si indica con il segno $+$ la faccia caratterizzata da una normale uscente coerente con il verso di s (vettore normale uscente della sezione $z+dz$); viceversa con il segno $-$ è denominata la sezione con normale controrientata rispetto al verso di s (vettore normale entrante nella sezione z).

L'asse y ha direzione ortogonale ad s ed è orientata verso l'alto, mentre l'asse z è coerente con il verso dell'asse curvilinea e l'asse x è entrante.

Si osserva che il taglio sulla faccia positiva punta verso l'alto, mentre su quella negativa è controverso rispetto all'asse y . Se il taglio è uniforme, il concio è equilibrato alla traslazione verticale.

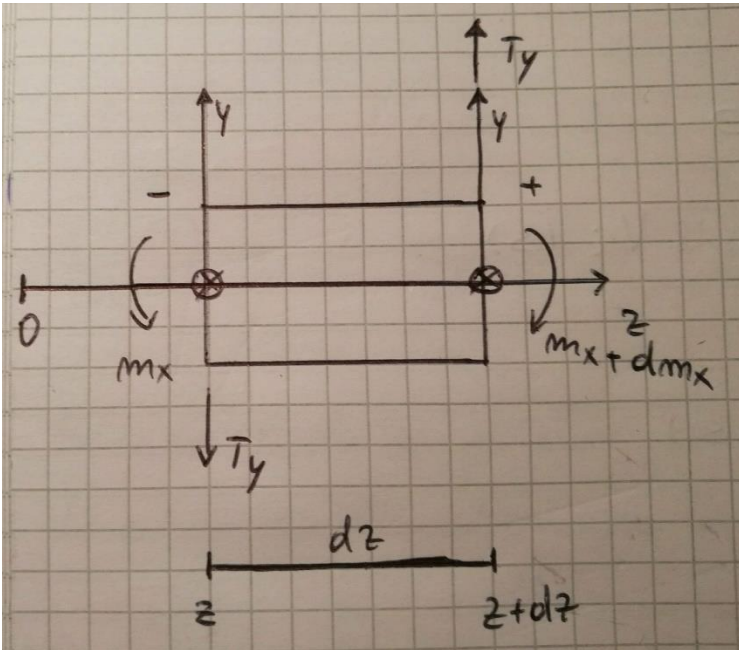
Per quanto concerne il momento flettente si dice positivo se sulla faccia positiva è orientato secondo l'asse x , mentre sulla faccia negativa è controrientata rispetto ad x .

Per semplicità considero solo l'asse z del sistema di riferimento locale, anziché l'asse curvilineo s e lascio invariati x e y .

Inoltre piuttosto che usare la coordinata z , che è l'asse locale che si azzera ad ogni baricentro della sezione del concio; si sceglie un asse con origine in O che cresce in modo tale da poter denominare la sezione negativa z e quella positiva $z+dz$.

Si osserva che il sistema non è in equilibrio. Analizzando l'equilibrio alla rotazione del concio di trave rispetto ad un polo O , risulta esservi anche un contributo legato al taglio oltre ai due momenti flettenti sulle sezioni estremali.

Nell'equilibrio i contributi dei momenti orari sono quelli positivi.



La sollecitazione che ci si aspetta è quindi assiale, in quanto alcune fibre (nell'estradosso) si allungheranno, le altre (nell'intradosso) si accorceranno.

1. $\frac{dm_x}{dz} = T_y$
2. $\frac{dm_y}{dz} = -T_x$

Equilibrio alla Rotazione :

$$(m_x + dm_x) - m_x - T_y dz = 0$$

$$dm_x - T_y dz = 0$$

$$\frac{dm_x}{dz} = T_y$$

Non precisando se il centro di rotazione è in C oppure in G, lo potrei lasciare come grado di libertà.

Siccome il momento flettente è legato al taglio, si può indicare anche la relazione tra tensione e momento flettente.

La tensione assiale in direzione z è funzione di x e y, dei momenti flettenti e dei momenti d'inerzia.

$$\sigma_z = f(x, y, m_x, m_y, J_{xx}, J_{yy}, J_{xy})$$

Nel dato concio considero una singola fibra, in modo tale da avere x ed y costanti in z. Bisogna sempre considerare l'ipotesi di sezione costante, il che implica che il momento d'inerzia è costante in z.

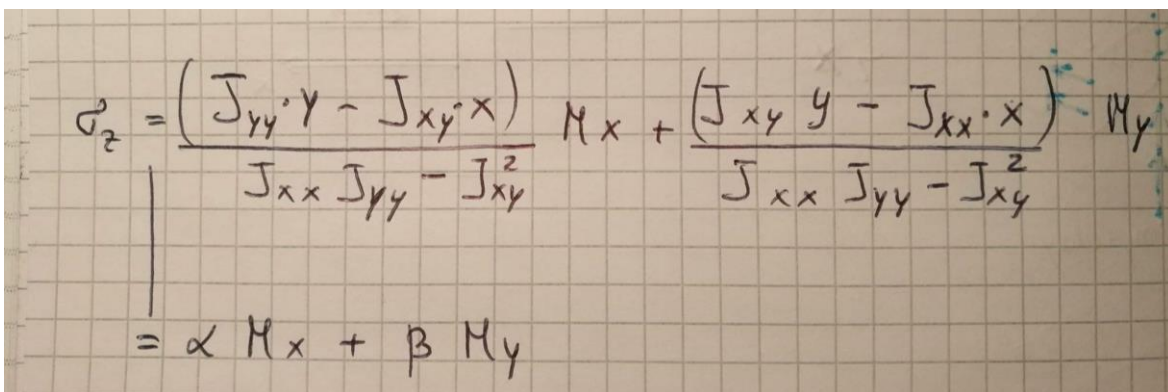
Solo i momenti m_x ed m_y sono variabili in z e σ_z varia linearmente in m_x ed m_y . Posso scrivere una formula meno generica che abbia dipendenza lineare:

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sigma_z &= \alpha(x, y, J^{**}) * m_x + \beta(x, y, J^{**}) * m_y \\ \text{➤ } \frac{d\sigma_z}{dz} &= \alpha(x, y, J^{**}) \frac{dm_x}{dz} + \beta(x, y, J^{**}) \frac{dm_y}{dz} \\ \text{➤ } \frac{d\sigma_z}{dz} &= \alpha(x, y, J^{**}) T_y - \beta(x, y, J^{**}) T_x \end{aligned}$$

NB Sulla base delle ipotesi fatte i coefficienti α e β sono costanti in z, ragion per cui la loro derivata rispetto a z sarà nulla.

Si osserva che calcolando la derivata della tensione rispetto a z, al secondo membro si può esplicitare il taglio. Perciò la variazione di tensione tra una sezione ed una scostata di dz è proporzionale al taglio.

L'espressione della tensione con i coefficienti α e β è usata per introdurre la formula di Jourawski.



The image shows a handwritten derivation of Jourawski's formula for axial stress distribution. The formula is written on a grid background and consists of two lines. The first line shows the stress σ_z as a function of moments M_x and M_y , with coefficients that depend on the moments of inertia J_{xx} , J_{yy} , and J_{xy} . The second line shows the simplified form of the formula, where the stress is a linear combination of the moments M_x and M_y with coefficients α and β .

$$\sigma_z = \frac{(J_{yy} \cdot y - J_{xy} \cdot x)}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} M_x + \frac{(J_{xy} \cdot y - J_{xx} \cdot x)}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} M_y$$

$$= \alpha M_x + \beta M_y$$

In realtà tale teoria venne formulata per sezioni rettangolari; in particolare, nelle traversine della transiberiana si osservò che, dato un carico verticale, le fratture erano allineate al piano neutro, quindi non erano dovute a flessione, ma al taglio. Inoltre il materiale era ortotropo in legno, era più resistente in direzione fibra, rispetto alla resistenza a taglio in direzione ortogonale alla fibra.

I conchi rettangolari vengono tagliati ortogonalmente alla linea media di parete, il taglio scorre lungo la sezione ed è parallelo al bordo. Ciò non accade nel caso di sezione circolare perché considerando le τ nell'intorno di un punto del bordo libero vi è una componente non nulla che rappresenta una non fisicità, il taglio è parallelo al bordo solo a cavallo del diametro.

Le traversine essendo in legno si osservava una resistenza maggiore in direzione della fibra, piuttosto che in direzione ortogonale alla fibra stessa, in cui la rigidità era minore ed è proprio qui che si aveva il taglio.

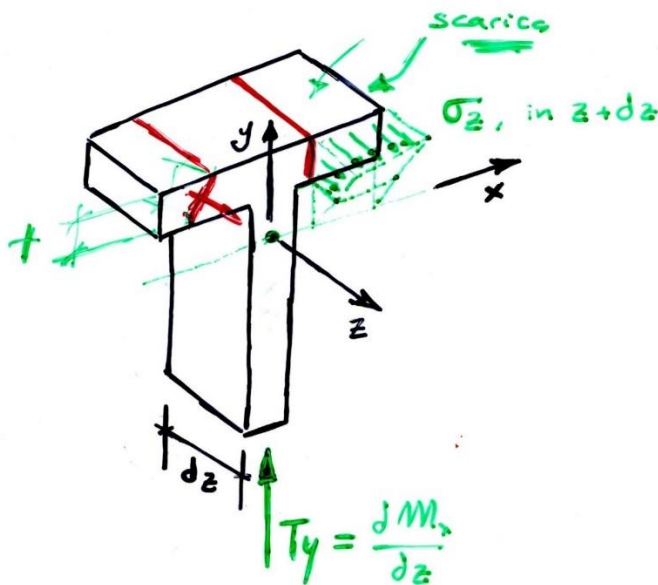
Si analizza di seguito una trave che presenta una sezione a T.

Vengono ricavate le tensioni associate al taglio sulla base di considerazioni di equilibrio del concio di sezione.

Si considerano due casi e dopo aver estratto le tensioni taglianti dovute agli sforzi di taglio, si applica la sovrapposizione degli effetti:

- 1) $T_x = 0$; $T_y \neq 0$;
- 2) $T_x \neq 0$; $T_y = 0$;

Di seguito viene analizzato il caso 1) $T_x = 0$; $T_y \neq 0$;

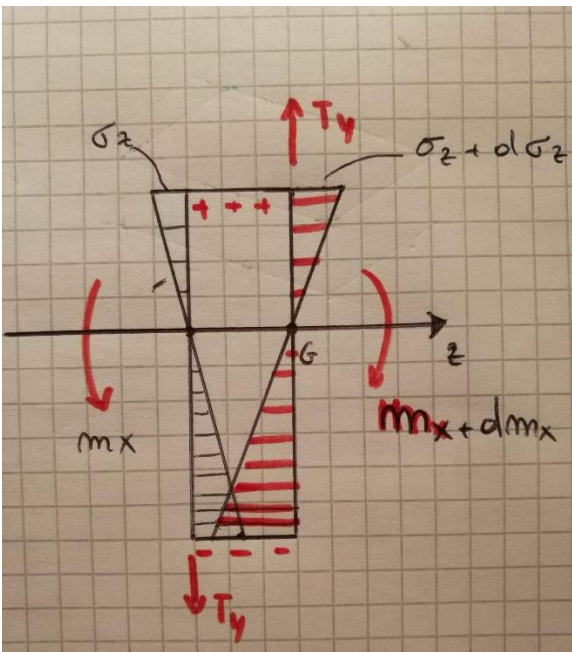


In linea teorica si può avere sollecitazione di solo taglio, ma in realtà essa si accompagna sempre a momento flettente. Ciononostante, anche in presenza di taglio il momento flettente si calcola allo stesso modo in quanto esso fornisce tensioni normali, mentre il taglio dà tensioni tangenziali, nel riferimento adottato.

Spesso, in approssimazione, si considera il taglio uniformemente distribuito sulla sezione resistente.

Il calcolo della tensione di taglio su una sezione è in realtà assai più complesso, esso varia sia secondo x che y (in forma parabolica per una sezione rettangolare).

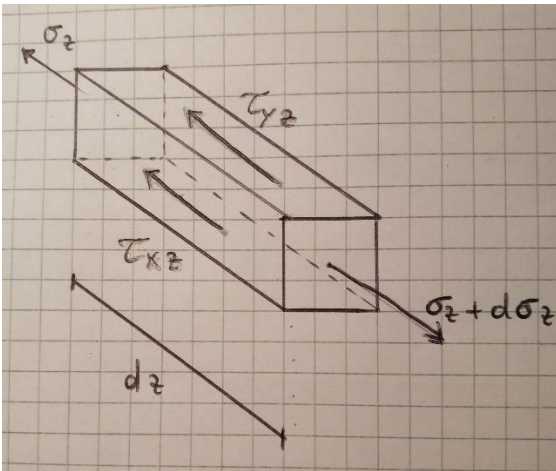
Si rappresentano le tensioni σ legate al momento flettente che risentono della variazione di momento. Esse sono disegnate nulle in corrispondenza del baricentro; hanno il picco attrattivo in corrispondenza del massimo valore di y .



Con il segno più indicato le fibre distese, con il segno – quelle contratte. Si osserva in figura che nella sezione $z+dz$ si hanno picchi attrattivi e compressivi maggiori, perché ho maggiore curvatura e quindi maggior pendenza.

➤ Caso Microscopico

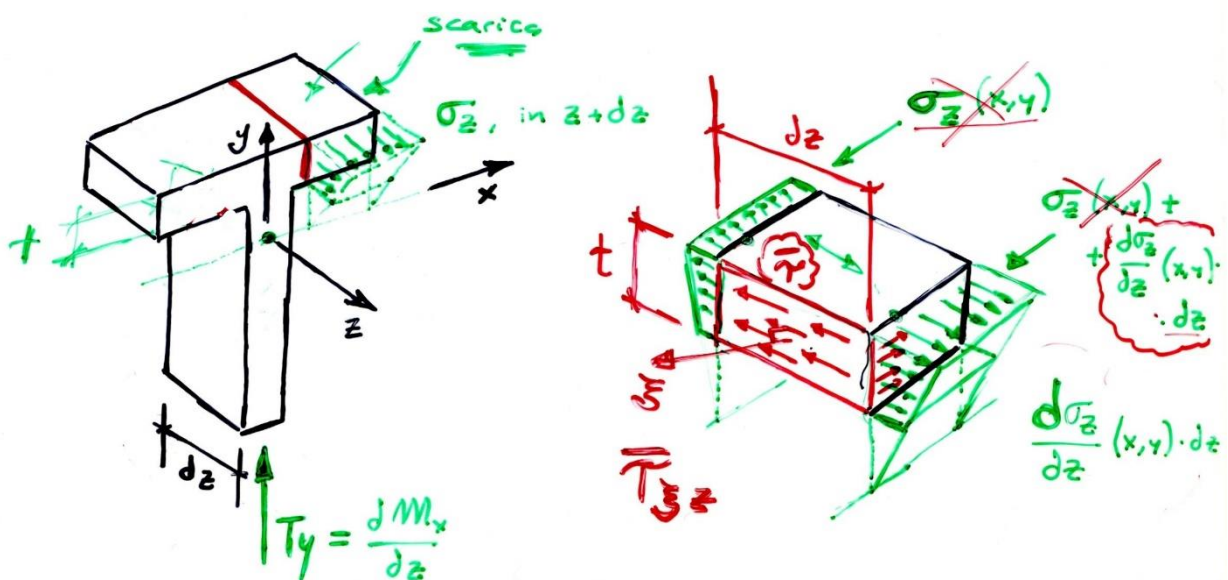
Dalla precedente sezione isolo un volumetto dV e lo considero nel solo sviluppo lungo z in cui agisce la tensione assiale. Sulle facce del concio parallele all'asse z si inseriscono le τ che compensano il disequilibrio.



--CURIOSITA': Il calcolo delle sezioni rettangolari con il metodo numerico è più complicato a causa della presenza dei punti angolosi, perciò uso un FEM strutturale.-

➤ Caso Concio Macroscopico

Ora si considera l'equilibrio del concio di trave macroscopico che va dalla superficie libera fino a un supposto taglio interno:



Il bordo naturale è marcato in nero, mentre la sezione tagliata dal taglio immaginario è in rosso.

Si traccia l'asse neutro, che si trova sotto l'ala e si rappresentano le tensioni: le σ hanno andamento lineare, in particolare sulla sezione z ho solo σ_z , mentre sulla

faccia $z+dz$ si ha $\sigma_z+d\sigma_z$; invece per le τ giacenti sulla sezione con normale ξ e in direzione z viene considerato il valore medio.

Si assume:

1. le τ siano solo in direzione assiale, perché anche se esistessero altre τ , sarebbero autoequilibrate, inoltre non ho nemmeno gli strumenti per misurarle;
2. le τ sono uniformi nella sezione, non variabili in direzione z e lungo lo spessore. Viene considerato solo τ medio lungo z (indicato con τ segnato), perché è l'unica cosa che riesco a calcolare.

Poiché nel problema di Saint Venant non ci sono forze di volume, né forze sulla superficie laterale, il concio è soggetto solamente alle tensioni σ_z e le τ agenti sul suo contorno interno.

Ora si consideri l'equilibrio del concio in direzione z e si tiene conto dello sviluppo in serie di Taylor di $d\sigma_z$ al primo ordine :

$$0 = -\bar{\tau} dz t + \iint_{a^*} \frac{d\sigma_z}{dz} dz da$$

La τ agisce in verso opposto a z , quindi si introduce il segno $-$;

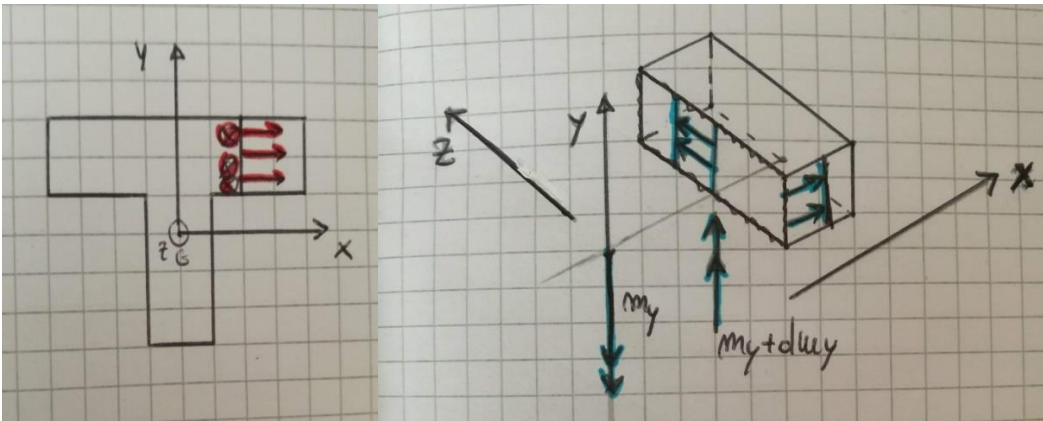
$$0 = -\bar{\tau} * t + \iint_{a^*} \frac{d\sigma_z}{dz} da$$

$$\bar{\tau} t = \iint_{a^*} \frac{d\sigma_z}{dz} da$$

- Secondo modo per arrivare al risultato è l'uso del rapporto incrementale di cui però si potrà fare il limite per $\Delta z \rightarrow 0$ solo se si ipotizza che la funzione abbia tutte le regolarità necessarie.

Nel caso 2) $T_x \neq 0$; $T_y = 0$;

I due momenti in figura danno analoghe farfalle tensionali, che sono diverse tra fronte e retro e causano un secondo contributo di disequilibrio al concio di concio di trave che sarà compensato dalle τ .



Si analizza lo stesso concio di trave e si osserva che vi è una variazione di momento flettente in direzione y dovuta al taglio T_x , mentre la variazione di momento flettente in direzione x è dovuta al taglio T_y .

Il prodotto tra tensione tagliante locale e spessore è pari ad un termine dovuto al disequilibrio. Andando ad effettuare la seguente sostituzione:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \alpha(x, y, J^{**})T_y - \beta(x, y, J^{**})T_x$$

Si esplicitano i coefficienti α e β , ottenuti raccogliendo dalla formula generale della tensione assiale i fattori comuni a m_x e m_y , che sfruttano anche per ricavare l'azione tagliante q sulla faccia.

Si ottiene :

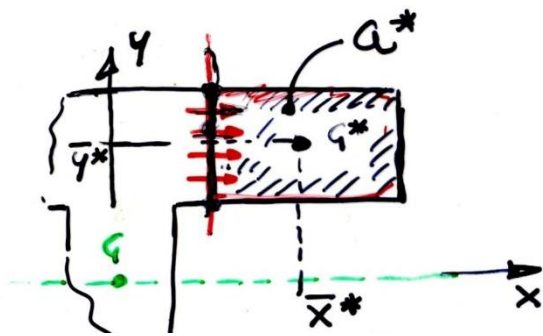
$$\begin{aligned} \bar{c} \cdot t &= \int_A (\alpha T_y - \beta T_x) dA \\ &= \int_A \left[\frac{(J_{yy} \cdot y - J_{xy} \cdot x)}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} T_y - \frac{(J_{xy} \cdot y - J_{xx} \cdot x)}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} T_x \right] dA \\ &\quad | \quad H_p \Rightarrow J^{**} \text{ costante in } A \\ &= \frac{J_{yy} T_y \int_A y dA - J_{xy} T_y \int_A x dA - J_{xx} T_x \int_A y dA + J_{xx} T_x \int_A x dA}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} \\ &= \frac{(J_{yy} T_y - J_{xy} T_x) A \cdot \bar{y}^* - (J_{xy} T_y - J_{xx} T_x) A \cdot \bar{x}^*}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2} \end{aligned}$$

In conclusione riesco a ricavare il valore dell'azione tagliente dovuta a T_y e T_x ,
tramite la seguente formula:

$$q = \bar{c} \cdot t = \frac{(T_x J_{xx} - T_y J_{xy}) A^* \bar{x}^* - (T_x J_{xy} - T_y J_{yy}) A^* \bar{y}^*}{J_{xx} J_{yy} - J_{xy}^2}$$

con $A^* \bar{x}^* = \iint_{a^*} x \, da$

$$A^* \bar{y}^* = \iint_{a^*} y \, da$$



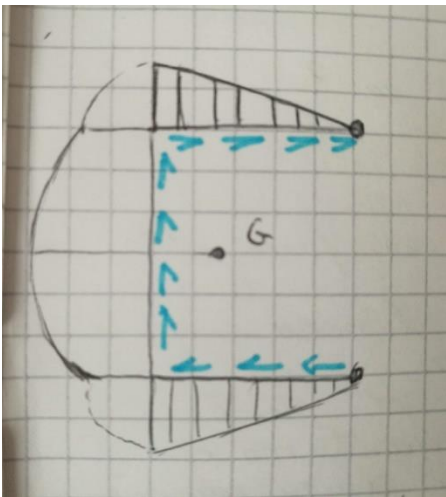
➤ Sezione C

La sezione in parete sottile ci consente di individuare subito il piano medio di parete e di indicare il taglio ortogonale ad esso.

Regola => Per **sezioni sottili** si taglia sempre ortogonalmente al piano medio di parete, perché non si riesce a gestire l'equilibrio delle τ in corrispondenza dello spigolo.

Osservazione: La tensione media può essere calcolata anche per una sezione circolare, tenendo conto delle limitazioni sul riorientamento delle τ nei bordi non paralleli a y , quindi per sezioni circolari il taglio viene effettuato lungo una corda.

Per sezioni ellittiche si taglia parallelamente agli assi, in particolare si taglia rispetto all'asse che rende la sezione sottile.



Muovendomi in modo continuo il prodotto $\tau_{media} \cdot t$ varia con continuità lungo la sezione, nasce nullo al bordo (esempio lo spigolo dell'ala)

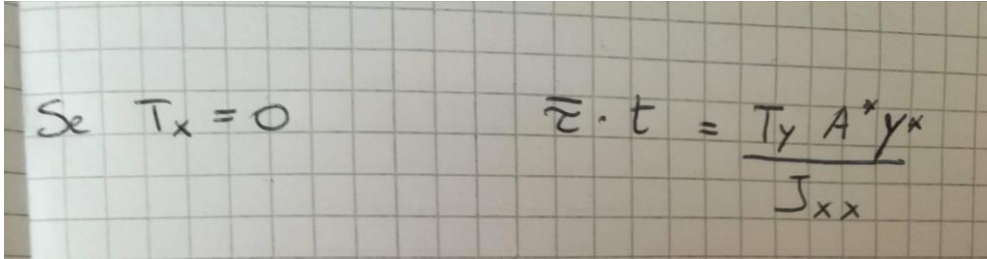
Applicato il Taglio T_y verso l'alto, se lo spessore t è costante, l'andamento della tensione tangenziale media avrà andamento lineare sull'ala. Si dice che c'è continuità nell'angolo (spigolo tra ala e anima), perciò il valore iniziale di τ sull'anima si fa coincidere con il valore assunto poco prima sull'ala.

Sull'anima si ha un andamento parabolico con il massimo a cavallo dell'asse di simmetria e del baricentro. Pertanto, il taglio presenta, lungo y , un andamento dominato dal momento statico ($A^* x^*$ e $A^* y^*$ con x^* e y^* coordinate baricentriche di a^* -area) – esso si annulla al top/bottom e risulta massimo nella sezione baricentrica. Rispetto al taglio mediato su tutta la sezione, il taglio al baricentro è superiore del 50% nella sezione rettangolare.

Infine sfruttando la simmetria per la sezione e l'antisimmetria per il carico, conosco l'andamento dell'altra parte di sezione.

La Formula generale dello sforzo per unità di lunghezza si semplifica per la sezione C e si ottiene:

Ipotesi: t (spessore) costante


$$\text{Se } T_x = 0 \qquad \bar{\tau} \cdot t = \frac{T_y A^* y^*}{J_{xx}}$$

Il momento statico non può essere discontinuo, da ciò deduco che il prodotto $\tau \cdot t$ non può essere discontinuo.

NOTA BENE : Per asse neutro s'intende la retta d'intersezione tra il piano neutro (il luogo dei punti per cui le tensioni normali e le deformazioni assiali sono pari a zero) e il piano della generica sezione sul quale agisce. Esso è quell'asse attorno al quale ruota la sezione:

1. Nei casi di momento flettente l'asse neutro giace nella sezione (si definisce la normale alla sezione ed il passaggio per il baricentro);
2. Nei casi di momento torcente l'asse neutro è perpendicolare alla sezione.
3. Solo nel caso del taglio non si ha asse neutro.

In base al tipo di verifica strutturale da effettuare, ci possono essere due tipologie di asse neutro.

1. L'asse neutro elastico si determina presupponendo una deformazione piana e una distribuzione tensionale sulla sezione di tipo lineare. Nel caso di sezione totalmente reagente la sua posizione è legata solamente alla geometria della sezione stessa.
2. L'asse neutro plastico si determina presupponendo sempre una deformazione piana unita ad una distribuzione tensionale ammissibile in campo plastico, sfruttando totalmente le risorse del materiale. La sua posizione dipende dalla geometria e dalle caratteristiche di resistenza del materiale.

