

Introduzione agli elementi finiti

Roberto Lugli

27 dicembre 2014

Indice

1	Elementi di matematica	2
1.1	Richiami di algebra lineare	2
1.2	Ricerca degli autovalori e degli autovettori	3
2	Discretizzare un sistema continuo	6
2.1	Il metodo degli elementi finiti	6
2.2	Elementi biella	9
2.2.1	Equazioni della struttura	10

Capitolo 1

Elementi di matematica

1.1 Richiami di algebra lineare

Un sistema lineare di equazioni algebriche si può scrivere, in forma matriciale, come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (1.1)$$

dove A è la matrice dei coefficienti, \mathbf{b} è il secondo membro e \mathbf{x} è il vettore delle incognite. È inteso che $A\mathbf{x}$ sta per il prodotto matrice-vettore, anche detto prodotto riga per colonna. Quando la matrice A è *singolare* si ha

$$\det A = 0$$

La matrice A possiede una inversa, indicata con A^{-1} , quando esiste A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (1.2)$$

essendo I la *matrice identità* che gode delle proprietà: $IB = BI = B, \forall B$. Un risultato importante stabilisce che la matrice A per possedere l'inversa A^{-1} , dev'essere *non singolare*, cioè $\det A \neq 0$. Invece, considerando il determinante dell'equazione (1.2) e ricordando che $\det(AB) = \det A \det B$ si ricava

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det I = 1$$

ne consegue

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

che perde di significato se A è non-singolare. Se esiste l'inversa della matrice A , la soluzione del sistema (1.1) si ottiene prontamente moltiplicando per l'inversa ambo i membri, in modo che sia

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Di conseguenza il problema di risolvere un sistema di equazioni algebriche si sposta al problema di trovare la matrice inversa A^{-1} . Questo non è sempre possibile. Tuttavia, quando la matrice inversa esiste, è unica, da cui segue che la soluzione del sistema (1.1) è unicamente espressa dalla (1.3). Nella stessa maniera, la soluzione dell'equazione (1.1) potrebbe non essere unica. Per dimostrarlo, consideriamo il *sistema omogeneo*

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

e poniamo \mathbf{x}_0 sia una generica soluzione. Allora, anche $\lambda\mathbf{x}_0$ è una soluzione, dove $\lambda \in \mathbb{R}$, e se \mathbf{x}_p è una soluzione del sistema completo (1.1), anche $\mathbf{x}_p + \lambda\mathbf{x}_0$ è una soluzione. Il risultato (1.3) restituisce ancora una soluzione unica per il sistema lineare. Ne consegue che il sistema lineare ha:

- una soluzione unica data dalla (1.3), quando $\det A \neq 0$,
- oppure soluzioni multiple o nessuna soluzione quando $\det A = 0$.

Si osservi che quando $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è sempre una soluzione, inoltre se $\det A \neq 0$, essa è *l'unica soluzione*. La soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è detta *soluzione banale*.

Infine si ricorda che la trasposta del prodotto è uguale al prodotto delle matrici trasposte scambiate di posto, ovvero

$$(A B)^T = B^T A^T$$

1.2 Ricerca degli autovalori e degli autovettori

Un problema importante dell'algebra lineare è determinare il vettore $\mathbf{u}^{(\lambda)} \neq \mathbf{0}$, in modo che sia

$$A\mathbf{u}^{(\lambda)} = \lambda\mathbf{u}^{(\lambda)} \quad (1.4)$$

I valori $\lambda \in \mathbb{R}$ sono definiti *autovalori* ed i relativi vettori $\mathbf{u}^{(\lambda)}$ sono detti *autovettori* corrispondenti agli autovalori λ . Si osservi che se $\mathbf{u}^{(\lambda)}$ è un autovettore, anche $\alpha\mathbf{u}^{(\lambda)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ lo è, cioè gli autovettori sono definiti a meno di un fattore di scala. Il problema della ricerca degli autovettori dell'operatore A si riduce al problema di risolvere un sistema lineare omogeneo. Infatti, il sistema lineare (1.4) può essere riscritto come

$$(A - \lambda I)\mathbf{u}^{(\lambda)} = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

dove I è la matrice identità, ovvero l'unica matrice con la proprietà che

$$I\mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}.$$

Il sistema lineare (1.5) certamente ammette la soluzione banale $\mathbf{u}^{(\lambda)} = \mathbf{0}$ che non interessa. Come discusso in precedenza, per i sistemi che hanno soluzione diversa dalla banale è richiesto che

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.6)$$

tale equazione restituisce lo *spettro dell'operatore* A , cioè l'insieme degli autovalori λ . Per una matrice quadrata N per N , la (1.6) è un'equazione polinomiale di grado N in λ , che ammette esattamente N soluzioni. Si osservi che le soluzioni potrebbero essere numeri complessi. Tuttavia, il risultato indica che per una matrice reale A , le radici complesse sono nella forma di coppie complesse coniugate. Una volta che gli autovalori sono determinati attraverso la (1.6), il risultato è inserito nel sistema lineare (1.5) da cui si ricavano gli autovettori. Si osservi che la condizione (1.6) garantisce che il sistema lineare (1.5) sia di rango $n < N$, da cui si ricava che almeno un'equazione nel sistema è una combinazione lineare delle altre. Questa equazione può essere scartata e l'autovettore è determinato a meno di un fattore di scala.

Si ricorda che data una matrice A , una *forma bilineare* B si scrive

$$B[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \cdot A\mathbf{b}$$

dove $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ indica il prodotto scalare fra due vettori qualsiasi \mathbf{a}, \mathbf{b} . In particolare

$$B[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = \mathbf{a} \cdot A\mathbf{a}$$

è una *forma quadratica*. La matrice *trasposta* A^T potrebbe essere definita come l'unica matrice che scambia la forma bilineare

$$\mathbf{a} \cdot A\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot A^T\mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$$

È facilmente dimostrato che la matrice trasposta si ottiene da A scambiando le righe con le colonne. Una matrice è simmetrica quando vale $A = A^T$. Per una matrice simmetrica, gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono *ortogonali*. Si ricorda che due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} sono detti *ortogonali*, spesso scritto come $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, quando il loro prodotto scalare è nullo, ad esempio quando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Infatti, poniamo che $\mathbf{u}^{(\lambda_1)}$ sia l'autovettore corrispondente all'autovalore λ_1 . Per definizione abbiamo

$$A\mathbf{u}^{(\lambda_1)} = \lambda_1\mathbf{u}^{(\lambda_1)} \tag{1.7}$$

Allora poniamo che $\mathbf{u}^{(\lambda_2)}$ sia l'autovettore corrispondente all'autovalore λ_2 . Per definizione si ha

$$A\mathbf{u}^{(\lambda_2)} = \lambda_2\mathbf{u}^{(\lambda_2)} \tag{1.8}$$

Considerando il prodotto scalare dell'equazione (1.7) con $\mathbf{u}^{(\lambda_2)}$ ed il prodotto scalare dell'equazione (1.8) con $\mathbf{u}^{(\lambda_1)}$ si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(\lambda_2)} \cdot A\mathbf{u}^{(\lambda_1)} = \lambda_1\mathbf{u}^{(\lambda_1)} \cdot \mathbf{u}^{(\lambda_2)} \\ \mathbf{u}^{(\lambda_1)} \cdot A\mathbf{u}^{(\lambda_2)} = \lambda_2\mathbf{u}^{(\lambda_2)} \cdot \mathbf{u}^{(\lambda_1)} \end{cases}$$

Essendo A simmetrica, i primi membri sono uguali. Sottraendo i primi membri fra loro ed ancora i secondi membri fra loro si ottiene

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{u}^{(\lambda_1)} \cdot \mathbf{u}^{(\lambda_2)}$$

e ammesso che $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dev'essere

$$\mathbf{u}^{(\lambda_1)} \cdot \mathbf{u}^{(\lambda_2)} = 0$$

cioè $\mathbf{u}^{(\lambda_1)}$ e $\mathbf{u}^{(\lambda_2)}$ sono vettori ortogonali.

Capitolo 2

Discretizzare un sistema continuo

2.1 Il metodo degli elementi finiti

Consideriamo un elemento strutturale nel piano x, y composto di un numero finito di elementi discreti (ad esempio triangoli, quadrati, ecc...), chiamati elementi finiti, che ricoprono l'area dell'elemento originale. Per ciascuno degli elementi finiti,

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y)$$

denoti lo *spostamento generico* come funzione di x e y . Il problema originale consiste nel trovare il campo \mathbf{u} all'interno di tutti gli elementi finiti. Invece ci dovremo accontentare di una versione semplificata del problema ed assumeremo che u sia *già dato* come funzione di x, y e degli spostamenti $\mathbf{q}_i = (u_x^{(i)}, u_y^{(i)}) = 1, \dots, n_{en}$ di alcuni punti speciali entro gli elementi, detti *nod*i. Inoltre, $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_i]$ è il *vettore spostamento nodale* e n_{en} è il numero di nodi di ciascun elemento. Si osservi che \mathbf{q} è un singolo vettore che garantisce gli spostamenti nodali a ciascun nodo, cioè

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_x^{(1)} \\ u_y^{(1)} \\ \dots \\ u_x^{n_{en}} \\ u_y^{n_{en}} \end{bmatrix}$$

Infatti, entro ciascun elemento, le funzioni di forma dello spostamento F collegano lo spostamento agli spostamenti nodali, cioè

$$\mathbf{u} = F\mathbf{q} \tag{2.1}$$

In particolare si assume che le funzioni di forma degli spostamenti siano date attraverso una *matrice geometrica* moltiplicata per un vettore di coefficienti

indeterminati \mathbf{c} . Quindi,

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{c} \quad (2.2)$$

e scrivendo queste espressioni alle coordinate nodali ξ_{q_i}

$$\mathbf{q} = \mathbf{G}(\xi_{q_i})\mathbf{c}$$

è possibile ottenere i coefficienti \mathbf{c} come funzione di \mathbf{q} . Infatti definiamo

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}(\xi_{q_i}) \quad (2.3)$$

poi, assumendo \mathbf{H} quadrata e con determinante non nullo, otteniamo

$$\mathbf{c} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{q}$$

uguagliando i secondi membri delle (2.1) e (2.2) possiamo scrivere

$$\mathbf{F}\mathbf{q} = \mathbf{G}\mathbf{c}$$

e sostituendo \mathbf{c} nell'ultima espressione otteniamo

$$\mathbf{F}\mathbf{q} = \mathbf{G}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{q}$$

da cui infine ricaviamo

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{H}^{-1} \quad (2.4)$$

Le *relazioni deformazione-spostamento* sono ottenute mediante differenziazione del campo di spostamenti \mathbf{u} all'interno di ogni elemento. È possibile definire l'*operatore deformazione* \mathbf{D} in modo che sia

$$\epsilon = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{q} \quad (2.5)$$

oppure in breve

$$\epsilon = \mathbf{B}\mathbf{q}$$

avendo posto $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{F}$. Ponendo che \mathbf{E} sia la *matrice costitutiva*, è possibile scrivere la relazione *tensione-deformazione*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\epsilon \quad (2.6)$$

Infine, ponendo che \mathbf{p} rappresenti le *azioni nodali* e \mathbf{b} le forze di massa dentro l'elemento, applicando il *principio dei lavori virtuali* otteniamo

$$\delta W_{ve} = \delta W_{vi} \quad (2.7)$$

essendo il lavoro virtuale delle forze esterne calcolato sopra una piccola variazione delle coordinate nodali $\delta\mathbf{q}$ scriviamo

$$\delta W_{ve} = \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{q} + \int_{V_{el}} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, da \quad (2.8)$$

mentre per il lavoro virtuale delle azioni interne (tensioni) sopra una piccola variazione delle deformazioni interne $\delta\epsilon$ scriviamo

$$\delta W_{vi} = \int_{V_{el}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\epsilon} da \quad (2.9)$$

L'integrazione è calcolata sopra il volume dell'elemento V_{el} . Sostituendo le equazioni (2.2, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9) nell'espressione del lavoro virtuale (2.7), si trova

$$\delta\mathbf{q} \cdot \left(\mathbf{p} + \int \mathbf{F}^T \mathbf{b} da \right) = \int \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{q} \cdot \mathbf{B} \delta\mathbf{q} da = \delta\mathbf{q} \cdot \left(\int \mathbf{B}^T \mathbf{E}^T \mathbf{B} da \right) \mathbf{q}$$

da cui, salvo che $\delta\mathbf{q} = 0$,

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}_b = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (2.10)$$

dove \mathbf{K} è la *matrice di rigidezza dell'elemento*

$$\mathbf{K} = \int_{V_{el}} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} da \quad (2.11)$$

e \mathbf{p}_b è il *carico nodale equivalente dovuto alle forze di massa*

$$\mathbf{p}_b = \int_{V_{el}} \mathbf{F}^T \mathbf{b} da \quad (2.12)$$

Per definizione (2.11), la matrice di rigidezza è simmetrica purché lo sia \mathbf{E} .

Quando le forze di inerzia sono considerate, potrebbero essere incluse nelle forze di massa: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_i$. Le forze di inerzia di traslazione si scrivono come

$$\mathbf{b}_i = -\rho \ddot{\mathbf{u}} = -\rho \mathbf{F} \ddot{\mathbf{q}}$$

da cui si ricava che *le funzioni di forma dell'accelerazione sono le stesse delle funzioni di forma degli spostamenti* \mathbf{F} . Nei limiti di questa ipotesi, si ottiene la *matrice di massa equivalente o consistente*. In questo caso ρ è la densità di massa (per unità di volume). Allora la (2.12) restituisce le forze di inerzia equivalenti

$$\mathbf{p}_{bi} = - \left(\int_{V_{el}} \rho \mathbf{F}^T \mathbf{F} da \right) \ddot{\mathbf{q}}$$

da cui la *matrice di massa dell'elemento* si definisce come

$$\mathbf{M} = \int_{V_{el}} \rho \mathbf{F}^T \mathbf{F} da \quad (2.13)$$

La definizione (2.13) comporta che la matrice di massa sia sempre simmetrica. L'equazione di equilibrio (2.10) diventa allora un'*equazione di moto*

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}_{b0} = \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}$$

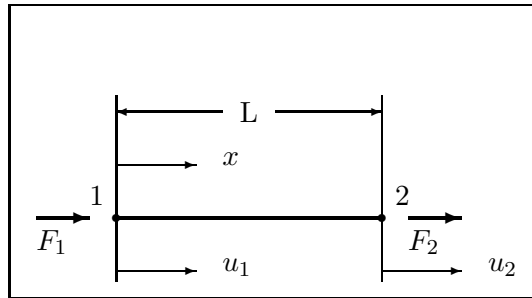


Figura 2.1: Elemento biella a due nodi

2.2 Elementi biella

Prendiamo in considerazione un elemento biella prismatico uniforme ed elastico di lunghezza L e modulo elastico E . Spesso un elemento biella viene rappresentato come una linea ma possiede una sezione trasversale di area A (vedi fig. 2.1). Ad ogni estremità è piazzato un nodo. Supponiamo per semplicità che i nodi si possano spostare solo in direzione assiale. Gli spostamenti nodali saranno u_1 e u_2 . Lo sforzo assiale σ può essere legato alle forze nodali F_1 and F_2 come da diagramma di corpo libero. In definitiva σ è legato al modulo elastico E ed alla deformazione assiale $\epsilon = (u_2 - u_1)/L$. Si adotta una convenzione di segno per cui le *forze nodali* e gli *spostamenti nodali* sono positivi nella stessa direzione. Riferendosi alla fig. 2.1 e imponendo l'equilibrio ai nodi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{AE}{L}(u_1 - u_2) &= F_1 \\ \frac{AE}{L}(u_2 - u_1) &= F_2 \end{aligned} \quad \text{oppure} \quad \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad k = \frac{AE}{L} \quad (2.14)$$

Per garantire l'equilibrio dell'elemento dovrà essere $F_1 = F_2$. Il prodotto fra matrici espresso nella (2.14) si può abbreviare nella forma

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (2.15)$$

Dove \mathbf{K} è la matrice di *rigidezza del singolo elemento*. Per l'elemento biella con solo spostamento assiale ai nodi \mathbf{K} è la matrice 2×2 mostrata nella (2.14). Il vettore $\mathbf{p} = [F_1 \ F_2]^T$ rappresenta le forze applicate all'elemento biella. Si noti che il termine AE/L può essere visto come k , la rigidezza di una molla lineare. Una biella ed una molla hanno lo stesso comportamento sotto carico assiale e sono rappresentate dalla stessa matrice di rigidezza. Nella matrice di rigidezza dell'equazione (2.14) possiamo vedere un esempio della regola generale seguente.

Una colonna di \mathbf{K} è il vettore dei carichi che dev'essere applicato ad un elemento al suo nodo, per mantenere uno stato di deformazione tale per cui il corrispondente grado di libertà ha un valore unitario mentre tutti gli altri gradi di libertà sono nulli.

Ad esempio poniamo $u_1 = 0$ e $u_2 = 1$ nell'equazione (2.14) in modo che il prodotto $\mathbf{K} \mathbf{u}$ fornisca la seconda colonna di \mathbf{K} . Così scriviamo

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} k & k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

che corrisponde ad una deformazione $\epsilon = u_2/L$.

2.2.1 Equazioni della struttura

Consideriamo una struttura costituita di due elementi biella uniformi ed elastici, attaccati per una estremità come in figura 2.2. Solo gli spostamenti assiali sono permessi. Le rigidezze degli elementi sono rispettivamente k_1 e k_2 . Le equazioni di rigidezza della struttura sono

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{K}_s \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (2.16)$$

\mathbf{K}_s è chiamata matrice di rigidezza della *struttura* o matrice di rigidezza *globale*. Tale matrice si può ottenere applicando la regola generale presente al paragrafo 2.2. Come mostrato in figura 2.2, attiviamo un grado di libertà alla volta, ponendo pari all'unità il grado di libertà attivato mentre gli altri sono nulli, e calcoliamo le forze nodali richieste per l'equilibrio statico. Per ogni grado di libertà disponiamo le forze nodali in colonna, ordinate secondo il numero di grado di libertà e con segno negativo se dirette contrariamente allo spostamento nodale. Ciascuno di questi vettori costituisce una colonna di \mathbf{K}_s . Una maniera alternativa per ottenere \mathbf{K}_s è la seguente. Immaginiamo che i due elementi in figura 2.2 non siano ancora connessi ma provvisti di estremità numerate: 1 e 2 per l'elemento 1, e 2 e 3 per l'elemento 2. Separatamente, quando estese alla "dimensione della struttura" le matrici di rigidezza per l'elemento 1 e 2 si scrivono

$$\begin{array}{c} u_1 \quad u_2 \quad u_3 \\ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{Elemento 1} \end{array}$$

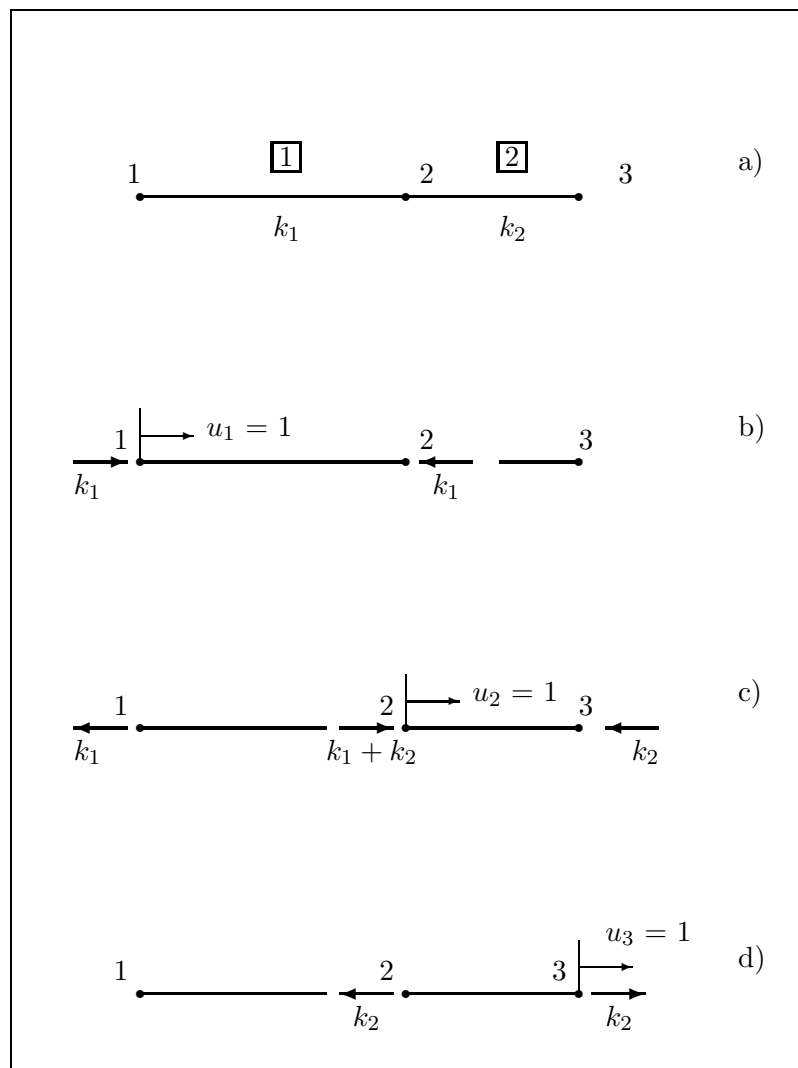


Figura 2.2: Struttura composta da due bielle

$$\begin{array}{c}
 u_1 \quad u_2 \quad u_3 \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & k_2 & -k_2 \\
 0 & -k_2 & k_2
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Elemento 2

dove le intestazioni delle colonne aggiunte u_1 , u_2 e u_3 indicano il grado di libertà attivato per generare le colonne della matrice. Gli zeri aggiunti nella matrice, ad esempio dell'elemento 1, possono spiegarsi come segue. La riga di zeri indica che poiché l'elemento 1 non è connesso al nodo 3, gli spostamenti di qualsiasi nodo non indurrà l'elemento 1 a produrre forze al nodo 3. La colonna di zeri indica che gli spostamenti u_3 non deformano l'elemento 1, così l'elemento 1 non applica forza a nessun nodo. La somma delle due matrici precedenti produce la stessa matrice K_s della formula (2.16). In generale si può immaginare uno spazio fisico, inizialmente vuoto ad eccezione dei nodi numerati nelle loro rispettive posizioni, che diventa una struttura mano a mano si aggiungono elementi. Contemporaneamente la matrice di rigidezza della struttura K_s diventa popolata dall'aggiunta dei coefficienti di rigidezza dagli elementi. Questo processo di costruzione della matrice della struttura K_s dalle matrici costituenti K è chiamato *assemblaggio*.

Se ad esempio l'estremità sinistra della struttura in fig. (2.2) è attaccata ad un supporto rigido, allora $u_1 = 0$, e la matrice di rigidezza della struttura relativa ai gradi di libertà "attivi" u_2 e u_3 diviene

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

da cui u_2 e u_3 possono essere determinati quando i carichi F_2 e F_3 sono applicati ai nodi 2 e 3 della struttura. Come per le altre matrici di rigidezza, le colonne di K_s nell'equazione (2.17) possono essere ottenute attivando i gradi di libertà a turno e calcolando i carichi nodali necessari a mantenere l'equilibrio.